北京航空航天大学 2005 年
硕士研究生入学考试试题 科目代码：493
高等代数 （共 3 页）

考生注意：所有答题务必书写在考场提供的答题纸上，写在本试题单上的答题一律无效（本题单不参加阅卷）。

一. 选择题（本题满分 **40** 分，每个小题 **4** 分）

1） 设 A 为 N 阶矩阵，且$|A|=0$，则 A 中________

A） 必有一列元素全为零

B） 必有两列元素成比例

C） 必有一列元素可以由其余列线性表示

D） 任一列向量是其余列向量的线性表示

2） 设β_1,β_2是非齐次线性方程组 AX=b 的两个不同的解，α_1,α_2是 AX=0 的基础解系，k_1，k_2为任意常数，则 AX=b 的通解为________

A） $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)/2$

B） $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)/2$

C） $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+(\beta_1-\beta_2)/2$

D） $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+(\beta_1+\beta_2)/2$

3） 设 A，B 都是n阶非零矩阵，且 AB=0 ，则 A 和 B 的秩________

A） 必有一个等于 0

B） 都小于n

C） 一个小于n，一个大于n

D） 都等于n

4） 设两个矩阵为$A_{m\times n}$， $B_{n\times m}$，则有：________

A） 当$m>n$时，必有$|AB|\neq 0$

B） 当$m>n$时，必有$|AB|=0$

C） 当$m<n$时，必有$|AB|\neq 0$

D） 当$m<n$时，必有$|AB|\neq 1$

5） 设 A，B 为同阶可逆方阵，则________

A）AB=BA　B）存在可逆矩阵 C，使$C^T AC=B$

C）存在可逆矩阵 P 使得$P^{-1}AP=B$

D）存在可逆矩阵 P，Q 使得 PAQ=B

6）设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_m$均为 N 维向量，那么下面结论正确的是

A）若$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots\ldots+k_m\alpha_m=0$，则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_m$线性相关

B）若对任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\ldots\ldots k_m$有

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots\ldots+k_m\alpha_m\neq0$，则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_m$线性无关

C）若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_m$线性相关，则有对任意一组不全为零的数

$k_1,k_2,\ldots\ldots,k_m$有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots\ldots+k_m\alpha_m=0$

D）若$0_1\alpha_1+0\alpha_2+\ldots\ldots+0\alpha_m=0$，则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_m$线性无关

7）设λ为 A 的特征值，$f(x)$为 N 次多项式，则$f(A)$的特征值为________

A）$f(\lambda)$　B）λ　C）A，D）$|A|$

8）A 为对称矩阵，且正交，则$A^2=$ ________

A）E　B）A　C）2A　D）3A

9）设 A 为实的反对称矩阵，且 Y=AX，则（X，Y）=________

A）0　B）1　C）3　4）$|A|$

10）数域 P 上的有限维线性空间V_1,V_2同构的充要条件________

A）V_1,V_2维数相等　B）$V_1=V_2$

C）V_1,V_2有相同的基　D）V_1,V_2的和为 V

二．（本题满分 15 分）

设$A=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}$,求一个正交矩阵 Q，使得$Q^{-1}AQ$为对角矩阵。

三．（本题满分 10 分）计算下列行列式：$\begin{vmatrix}1&2&3&\ldots&n\\a&1&2&\ldots&n-1\\a&a&1&\ldots&n-2\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a&a&a&\ldots&2\\a&a&a&\ldots&1\end{vmatrix}$

四．（本题满分 15 分）a 为何值时，下列方程组有解，并求出解。

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a-3 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -2 \end{cases}$$

五．（本题满分 10 分）判断下列二次型是否是正定的

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$$

六．（本题满分 10 分）假设 $V_i, i = 1,2,\ldots\ldots,s$ 为线性子空间，$\sum_{i=1}^{s} V_i$ 为直和的充要条件 $V_i \cap \sum_{j \ne i} V_j = \{0\}, i = 1,2,3,\ldots.,s$。

七．（本题满分 10 分）设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_t$ 是两组 n 维向量，证明：若这两个向量组都线性无关，则 $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s) \cap L(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_t)$ 维数等于齐次方程组：$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots\ldots + x_s\alpha_s + y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \ldots\ldots + y_t\beta_t = 0$ 的解空间的维数。

八．（本题满分 10 分）设 T_1, T_2 为欧氏空间 V 的两个对称变换，证明 $T_1T_2 + T_2T_1$ 也是 V 中的对称变换。

九．（本题满分 10 分）设 A 是复数域上一个 n 阶方阵，证明 A 相似于一个上三角阵。

十．（本题满分 10 分）设 A，B 为 n 矩阵，且 A 有 n 个互异的特征值，则 A 的特征向量恒为 B 的特征向量的充要条件证明是 AB=BA

十一．（本题满分 10 分）设 T 为线性空间 V 的一个线性变换，并且 $T^2 = T$，证明：

1) $T^{-1}(0) = \{\alpha - T\alpha \mid \alpha \in V\}$

2) $T^{-1}(0), TV$ 对 V 的线性变换 S 不变的充要条件是 T 与 S 是可交换。