

北京航空航天大学2006年 硕士研究生入学考试试题

科目代码: 391

数学分析

(共2页)

考生注意: 所有答题务必书写在考场提供的答题纸上, 写在本试题单上的答题一律无效(本题单不参与阅卷)。

一、(本题15分)

已知 $0 < x_1 < \sqrt{3}$, 令

$$x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

二、(本题15分)

设 $y = \frac{1}{1-x^2}$. 求 n 阶导数 $y^{(n)}$.

三、(本题15分)

设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数, 证明,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

四、(本题15分)

设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = a$. 证明, 对任何正数 T ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+T) - f(x)] = aT.$$

五、(本题15分)

计算双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 所围平面图形的面积.

六、(本题 15 分)

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内二阶可导. 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x^2} = 0.$$

求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

七、(本题 15 分)

设 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在实轴 \mathbb{R} 上连续. 证明, $f'(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调上升的充要条件是, 对任何正数 h , 函数 $f(x+h) - f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调上升.

八、(本题 15 分)

设幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的收敛半径 $R = +\infty$, 且记其和函数为 $f(x)$. 令

$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. 证明, 对任何常数 $a < b$, 函数序列 $\{f(f_n(x))\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(f(x))$.

九、(本题 20 分)

求函数 $f(x, y) = \cos x \cos y \cos(x+y)$ 在闭正方形 $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ 上的最大值和最小值.

十、(本题 10 分)

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0) = f'(0) = 1$. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^{\frac{1}{x}}$.