北京航空航天大学 2006 年
硕士研究生入学考试试题 科目代码：493

高等代数 （共 2 页）

考生注意：所有答题务必书写在考场提供的答题纸上，写在本试题单上的答题一律无效（本题单不参与阅卷）。

一、 （本题 15 分）

设 $f_1,\cdots,f_n \in F[x]$，F 为数域，令

$$I=\{f_1g_1+\cdots+f_ng_n \mid g_i \in F[x], i=1,\cdots,n\},$$

利用 I 证明 $f_1,\cdots,f_n$ 存在最大公因式.

二、 （本题 15 分）

证明：若 $(f,g)=1$，则 $(fg,\ f+g)=1$.此处 (f,g) 指 f,g 的最大公因式.

三、 （本题 15 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -3 & 6 & -9\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}$，求一个三阶矩阵 B，使得 $R(B)=2$，且 $AB=0$.

四、 （本题 15 分）

设 $\begin{cases}ax+by=1\\ cx+dy=0\end{cases}$ 及 $\begin{cases}ax+by=0\\ cx+dy=1\end{cases}$ 均有解，证明 $ad-bc\neq 0$.

五、 （本题 15 分）

设 A,B,C,D 均为 n 阶方阵，矩阵 A 可逆，且 $AC=CA$. 证明：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

六、 （本题 15 分）

已知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$，$\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\cdots$，$\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$ 也是 $AX=0$ 的一个基础解系，求实数 t_1,t_2 的关系.

七、 （本题 15 分）

设 V 是数域 F 上一个非零向量空间，证明 V 不可能表成两个真子空间（即不等于 V 的子空间）的并集.

八、 （本题 15 分）

设四阶实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

用正交矩阵把 A 相似对角化.

九、 （本题 15 分）

设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是数域 F 上一个二次型，A 是这个二次型的矩阵，$\lambda\in F$ 是 A 的一个特征根．证明：存在不全为零的一组数 $c_1,\cdots,c_n\in F$ 使得 $f(c_1,\cdots,c_n)=\lambda(c_1^2+\cdots+c_n^2)$.

十、 （本题 15 分）

设 V 为 4 维实向量空间，W 是由 $\alpha_1=(1,0,2,1)$，$\alpha_2=(2,1,2,3)$，$\alpha_3=(0,1,-2,1)$ 张成的 V 的子空间．求 W 的正交补 $W^\perp$ 的一组标准正交基.