

北京航空航天大学2007年 硕士研究生入学考试试题

科目代码: 791

数学分析

(共2页)

考生注意: 所有答题务必书写在考场提供的答题纸上, 写在本试题单上的答题一律无效(本题单不参与阅卷)。

一、(本题15分)

设有界数列 $\{x_n\}$ 只有有限个聚点. 证明: 存在有限个数 $a_1, \dots, a_k$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a_1) \dots (x_n - a_k) = 0.$$

二、(本题15分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 连续. 证明, 如果对任何 $x \in (-\infty, \infty)$ 都有 $f(x) = f(2x)$, 则 f 必是常值函数. 请举例说明, 若没有 f 连续的条件, 结论未必成立.

三、(本题15分)

设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 可导, 函数 $|f'(x)|$ 在 (a, b) 连续, 证明 $f'(x)$ 在 (a, b) 连续.

四、(本题15分)

利用函数 e^x 的泰勒展开式计算 $\sqrt{e}$, 使得误差不超过 10^{-2} .

五、(本题15分)

设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

六、(本题 15 分)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导函数, 且 $f(a) = 0$. 证明

$$\int_a^b f^2(x)dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

七、(本题 20 分)

设 a_n 满足 $\ln \ln n \leq a_n \leq \ln n, n = 2, 3, \dots$. 研究函数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 的收敛性、一致收敛性以及和函数的连续性、可导性.

八、(本题 15 分)

设函数 $f(x, y)$ 定义在 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 上. 假设在 D 内任何一点下述条件成立:

- (i) $f(x, y)$ 关于变量 x 连续;
- (ii) $f(x, y)$ 关于变量 y 可偏导, 且 $|f'_y(x, y)| \leq 1$.

证明 $f(x, y)$ 在 D 内连续.

九、(本题 10 分)

记 $D_R = \{(x, y) | |x| \leq R, |y| \leq R\}$. 证明

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{D_R} (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)} dx dy = \pi.$$

十、(本题 15 分)

计算曲线积分

$$\int_{AO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$$

其中 AO 为由点 $A(a, 0)$ 至原点 $O(0, 0)$ 的上半圆周: $x^2 + y^2 = ax$.