

北京航空航天大学2008年
硕士研究生入学考试试题 科目代码: 791

数学分析 (共2页)

考生注意: 所有答题务必书写在考场提供的答题纸上, 写在本试题单上的答题一律无效 (本题单不参与阅卷).

一、(本题10分)

设 $f(x) = x^2 \sin x$. 求 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的第2008阶导数.

二、(本题15分)

证明: 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

三、(本题15分)

设函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$$

在 $(0, \infty)$ 内有一阶连续导数, 求出 a, b 之值.

四、(本题15分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 并且单调增加. 证明: 对任意的 $a \in (0, 1)$ 都有

$$\int_0^a f(x) dx \leq a \int_0^1 f(x) dx.$$

五、(本题15分)

求由曲线 $y^2 = 2px + p^2$ 与 $y^2 = -2qx + q^2$ 所围成的图形的面积, 这里 p, q 为正常数.

六、(本题 15 分)

设 $a_n = \int_0^1 (1-x)^n x^2 dx$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并求其和.

七、(本题 15 分)

设 $f(x)$ 在实数轴 $(-\infty, +\infty)$ 内无穷次可微, 而且当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时有 $f(x) \sin x \geq 0$. 证明: 对任何自然数 n , $f^{(n)}(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内均有零点.

八、(本题 15 分)

设 $S_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2}$. 证明:

- (1) $\{S_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛;
- (2) $\{S'_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不一致收敛.

九、(本题 15 分)

设 $a > 0$, $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L > 0$, 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, +\infty).$$

证明: $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, 并且一致连续.

十、(本题 20 分)

- (1) 证明: 方程 $\sin^n x + \sin^{n-1} x + \cdots + \sin x = 1$ ($n \geq 2$) 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有唯一解 x_n ;
- (2) 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.