2000年北京理工大学数学物理方法考研试题

请任选五个题（每题20分）

一. 在区域Ω内，$\Phi(x,y,z)$满足拉普拉斯方程$\nabla^2\Phi=0$，在边界S上满足确定的边界条件$\Phi|_s=\varphi$，试证明Φ在Ω内有唯一确定解。

二. 用行波法求解无限空间的一维波动方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\\ u|_{t=0}=-\dfrac{4}{3a}x^3\ ,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=4x^2-1\end{cases}$$

三. 用分离变量法将球坐标系内的拉普拉斯方程$\nabla^2\Phi(r,\theta,\varphi)=0$分解为三个单变量函数的常微分方程，并写出$\Phi(r,\theta,\varphi)$形式通解（不用具体求解每个常微分方程）。

四. 求下面的定解问题，其中B为已知常数.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad 0<x<a\ ,\quad t>0\\ u|_{x=0}=0\ ,\quad u|_{x=a}=0\\ u|_{t=0}=0\ ,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=B\end{cases}$$

五. 在二维平面域的一点P(x,y)上，将泊松方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f$化成差分方程。

六. 1. 指出整数阶贝塞尔函数$J_n(x)$和$Y_n(x)$在$x=0$和$x\to\infty$处的值；

2. 由整数阶贝塞尔函数表达式证明：$xJ_n'(x)=nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x)$。

七. 试将 $f=5x^3+2x^2-5$ 写成勒让德多项式级数的形式，并求出前3项的系数 $C_0\sim C_2$。

参考公式

1 球坐标系内的拉普拉斯方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

2 第一类整数阶贝塞尔函数

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(n+m)!}(\frac{x}{2})^{n+2m}$$

3 勒让德多项式

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}\qquad M=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & \text{n为偶数时}\\ \dfrac{n-1}{2} & \text{n为奇数时}\end{cases}$$

4 勒让德多项式正交公式

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1} & m=n\end{cases}$$

5. 泰勒级数展开式

$$f(x+\Delta x,y,z)=f+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(\Delta x)^n+\cdots$$

6. 格林第一恒等式

$$\iiint_{\Omega}(v\nabla^2 u+\nabla u\cdot\nabla v)dV=\oiint_{S}v\frac{\partial u}{\partial n}ds$$