已对 5.30

机密★启用前

北京理工大学 2003 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题答案必须书写在答题纸上，在试题和草稿纸上答题无效。

科目代码：447　　科目分号：0706

科目名称：高等代数

一.（15 分）设 A 为 n 阶实方阵，且特征值不等于 -1。证明：

1. $A+I$ 与 A^T+I 都不可逆；

2. A 是正交矩阵的充分必要条件为

$$(A+I)^{-1}+(A^T+I)^{-1}=I,$$

这里 I 表示单位矩阵，A^T 表示 A 的转置。

二.（20 分）设复数 ω 满足 $\omega^n=1$，但对 $0<k<n$，$\omega^k\neq 1$。令

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \omega^t & \omega^{2t} & \cdots & \omega^{(n-1)t} \\ 1 & \omega^{t+1} & \omega^{2(t+1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(t+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{t+s-1} & \omega^{2(t+s-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(t+s-1)} \end{pmatrix}$$

这里 s,t 都是正整数，且 $s<n$。任取 $s\times 1$ 复矩阵 b 和 $n\times 1$ 复矩阵 c，分别讨论线性方程组 $AX=b$ 和 $A^TY=c$ 的解的状况。

三.（15 分）设 V 是 n 维欧氏空间。证明：在 V 中给定向量 α，则 V 上实函数 $f(\beta)=(\alpha,\beta)$ 连续，即任取 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得当 $|\gamma-\beta|<\delta$ 时，必有 $|f(\gamma)-f(\beta)|<\varepsilon$。

机密★启用前　　北京理工大学2003年攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题答案必须书写在答题纸上，在试题和草稿纸上答题无效。

科目代码：447　　科目分号：0706

科目名称：高等代数

四.（20分）设A,B,C分别为$n\times m,m\times p,p\times q$矩阵。

1．证明：秩(AB)+秩$(BC)\leqslant$秩(B)+秩(ABC)；

2．证明：若存在自然数N，使得方阵G满足

$$秩(G^N)=秩(G^{N+1}),$$

则有 $秩(G^N)=秩(G^{N+1})=秩(G^{N+2})=\cdots$。

五.（15分）设W_1与W_2分别为n元齐次线性方程组$AX=0$和$BX=0$的解空间，试构造两个n元齐次线性方程组，使它们的解空间分别为$W_1\cap W_2$和W_1+W_2。

六.（15分）设多项式$f(x),g(x),h(x)$有

$$f(x^5)+xg(x^5)+x^2h(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)k(x)$$

证明：$x-1$是$f(x),g(x),h(x)$的一个公因式。

七.（15分）证明：实对称矩阵A的所有特征值位于区间$[a,b]$上的充分必要条件是：实对称矩阵$A-\lambda_0 I$对任意$\lambda_0<a$是正定的，而对任意$\lambda_0>b$是负定的。

机密★启用前

北京理工大学 2003 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题答案必须书写在答题纸上，在试题和草稿纸上答题无效。

科目代码： 447 科目分号： 0706

科目名称： 高等代数

八.（15 分）设 $\underline{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，证明：下列四个条件等价

1. $V=\underline{A}V+\underline{A}^{-1}(0)$ 2. $V=\underline{A}V\oplus\underline{A}^{-1}(0)$

3. $\underline{A}^2V=\underline{A}V$ 4. $(\underline{A}^2)^{-1}(0)=\underline{A}^{-1}(0)$

这里，$\underline{A}^{-1}(0)$ 表示线性变换 $\underline{A}$ 的核，$\underline{A}V$ 表示线性变换 $\underline{A}$ 的值域，$\oplus$ 表示子空间的直和。

九.（10 分）设 $W_0,W_1,W_2,\cdots,W_t$ 是 n 维线性空间 V 的 $t+1$ 个子空间，且有 $W_0\subset W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_t$。试证：存在 $i\,(1\le i\le t)$，使得 $W_0\subset W_i$。

十.（10 分）设 A 是 n 阶正定矩阵，构造方阵序列

$$X_0=I,\ \ X_{k+1}=\frac{1}{2}(X_k+AX_k^{-1}),\ \ k=0,1,2,\cdots。$$

试证：$\lim\limits_{k\to\infty}X_k$ 存在（$\lim\limits_{k\to\infty}X_k$ 存在定义为：设 $X_k=(x_{ij}^{(k)})_{n\times n}$，则对任意 $(1\le i,j\le n)$，均有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{ij}^{(k)}$ 存在）。