机密★启用前

北京理工大学2004年攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题答案必须书写在答题纸上，在试题和草稿纸上答题无效。

科目代码：447　科目分号：0709

科目名称：高等代数

一.（20分）证明：实反对称矩阵的特征值的实部全为零。

二.（20分）设A和B都是n阶正交矩阵，且$|A|+|B|=0$，试证：$A+B$不可逆。

三.（20分）证明：线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

有解的充分必要条件为对任意m个数$y_1,y_2,\cdots,y_m$，只要$\sum_{i=1}^{m}y_ia_{ij}=0,\ j=1,2,\cdots,n$，便有$\sum_{i=1}^{m}y_ib_i=0$。

四.（15分）设A是n阶复方阵，证明：若$A^2+A=2I$，则A可对角化，这里I是n阶单位矩阵。

五.（15分）设A、B分别是数域K上的$p\times n$、$n\times m$矩阵，令

$$V=\{x\,|\,x\in K^m, ABx=0\},\quad W=\{y\,|\,y=Bx, x\in V\}$$

证明：W 是向量空间 V 的子空间，且

$$\dim W = rank(B) - rank(AB)。$$

六．（20 分）设 $\underline{A}$ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换，$f(x)$、$g(x)$ 为普通的多项式，证明：

（1） $$Ker(f(\underline{A})) + Ker(g(\underline{A})) \subseteq Ker(f(\underline{A}), g(\underline{A}))$$

这里 $(f_1(x), f_2(x))$ 表示 $f_1(x), f_2(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式；

（2）若 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$，则

$$Ker(f(\underline{A})) \oplus Ker(g(\underline{A})) = Ker((f(\underline{A}), g(\underline{A})))$$

这里 $\oplus$ 表示子空间的直和。

七．（15 分）给定不全为零的多项式 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$，证明：存在六个多项式 $g_1(x), g_2(x), g_3(x), h_1(x), h_2(x), h_3(x)$ 使

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$$

机密★启用前

北京理工大学2004年攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题答案必须书写在答题纸上，在试题和草稿纸上答题无效。

科目代码：447　　科目分号：0709

科目名称：高等代数

这里$(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$表示$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$的首项系数为1的最大公因式。

八.（10分）写出你所知道的齐次线性方程组的基础解系的等价条件，并对它们的正确性予以证明。

九.（15分）定义了向量内积的实线性空间即为欧氏空间。请说明引入向量内积以及构造标准正交基的目的与意义，并简述标准正交基在理论研究与实际应用中的作用。