北京理工大学

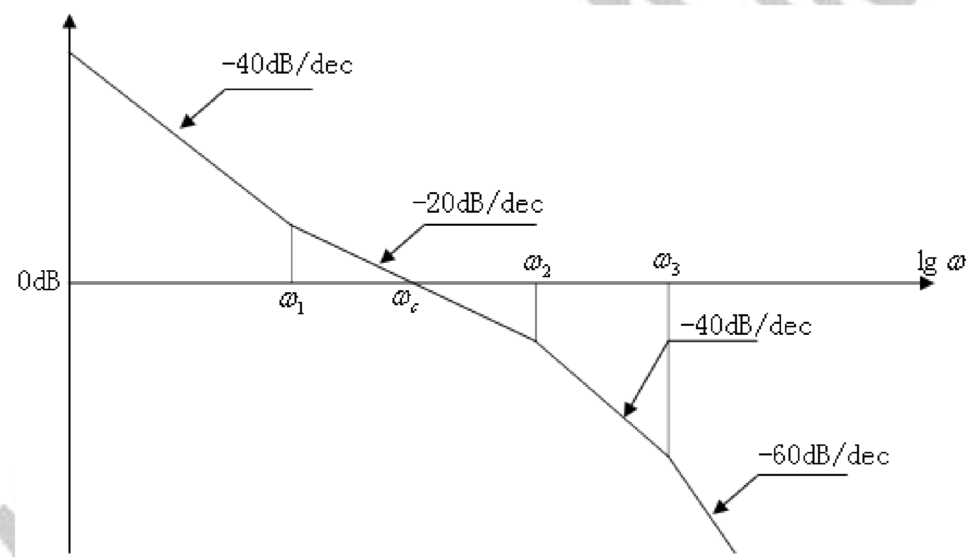
2005年自动控制理论考试试题

一、(25分)最小相位系统的开环渐近幅频特性曲线如图(1)所示，其中参数ω_1，ω_2，ω_3，ω_c为已知。

(1)求开环传递函数表达式；

(2)给出闭环系统相位稳定裕量表达式。当$\omega_c/\omega_1=100$，$\omega_c/\omega_2=2$，$\omega_c/\omega_3=0.1$时，判别系统的稳定性，并画出Nyquist图的大致形状；

(3)设参考输入$r(t)=bt+\frac{1}{2}ct^2$，求系统的稳态误差。

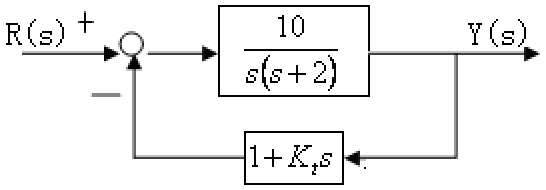


图(1)

二、(20分)系统如图(2)所示。

(1)画出以K_t为参数的闭环根轨迹；

(2)从根轨迹上确定K_t应取的值和闭环极点，使系统的单位阶跃响应的动态品质指标百分比超调$\sigma\%\le16.3\%$。



图（2）

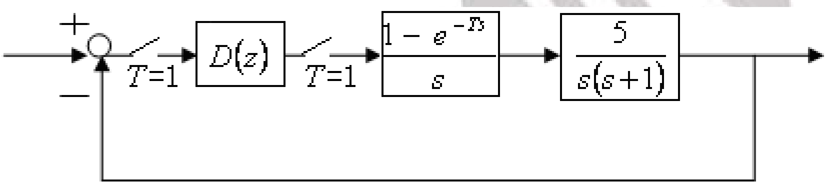
三、（20 分）设

$$f_1(s)=s^3+6s^2+12s+8$$
$$f_2(s)=s^3+3s^2+4s+2$$
$$f(s,\lambda)=(1-\lambda)f_1(s)+\lambda f_2(s)$$

（1）试用 Routh 判据证明，对所有 $\lambda\in[0,1]$， $f(s,\lambda)$均稳定。

（2）试用根轨迹方法证明，对所有 $\lambda\in[0,1]$，$f(s,\lambda)$均稳定。

四、（20 分）考虑如图（3）所示的离散时间控制系统， $D(z)$为数字控制器。



图（3）

（1）求被控对象的开环传递函数；

（2）当 $D(z)=1$时，判断闭环系统的稳定性；

（3）试设计系统在单位阶跃输入下的最小拍控制器 $D(z)$，并计算调节时间。

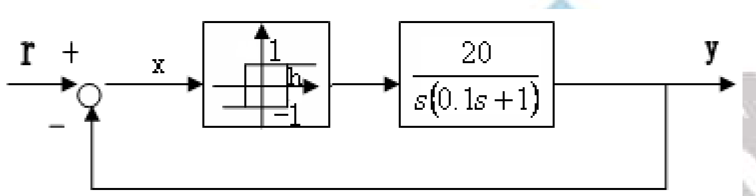
注：$\dfrac{1}{s}\Leftrightarrow\dfrac{z}{z-1}$；　$\dfrac{1}{s+\alpha}\Leftrightarrow\dfrac{z}{z-e^{-\alpha T}}$；$\dfrac{1}{s^2}\Leftrightarrow\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$

五、（20 分）非线性系统如图（4）所示，滞环继电器特性的描述函数为

$$N(X)=\frac{4M}{\pi X}\sqrt{1-\left(\frac{h}{X}\right)^{2}}-j\frac{4hM}{\pi X^{2}}=\frac{4}{\pi X}\sqrt{1-\left(\frac{h}{X}\right)^{2}}-j\frac{4h}{\pi X^{2}},\quad M=1$$

（1）该系统是否存在自持振荡？自持振荡是否稳定？

（2）若存在稳定的自持振荡，当要求自持振荡频率 $\omega \geq 20rad/\sec$，振幅 ≤ 0.7 时，继电器参数 h 应如何取值？



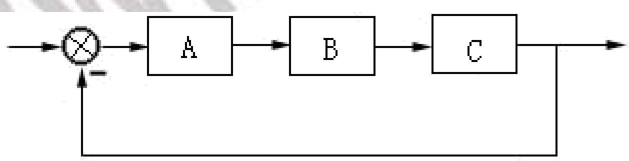
图（4）

六、（25 分）如图（5a）所示系统由 A、B、C 组成，它们各自对不同输入 $r(t)$ 的响应曲线 $y(t)$ 分别如图（5b）所示。

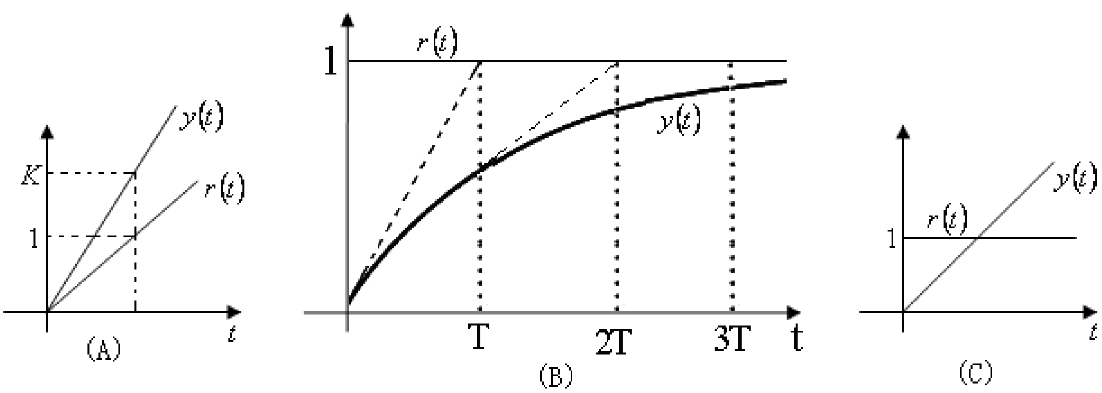
（1）该系统的三个环节 A、B、C 的传递函数是什么？开环系统的总传递函数是什么？画出其结构图；

（2）从结构图上选状态变量，写出状态空间表达式；

（3）当 $K=10, T=0.1$，求单位阶跃输入时系统的稳态误差和动态响应指标百分比超调 $\sigma\%$，上升时间 t_r，峰值时间 t_p。

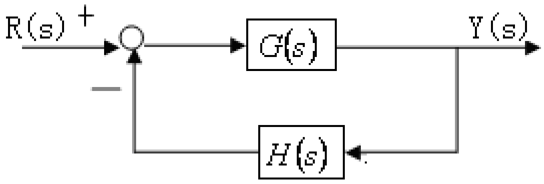


图（5a）



图（5b）

七、（20 分）系统如图（6）所示：

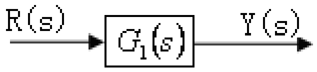


图（6a）

设

$$G(s)=\frac{3(s+1)}{(s-1)(s+2)},\quad H(s)=\frac{s-1}{s+1}$$

（1）写出 $G(s)$和$H(s)$ 的对角规范形状态空间表达式，并由此给出图（6b）所示系统的状态空间表达式；



图（6b）

（2）判断图（6b）所示系统的稳定性；

（3）若系统不稳定，判断是否存在带状态观测器的状态反馈，使系统稳定；

（4）设

$$G(s)=\frac{s-1}{s+1},\quad H(s)=\frac{3(s+1)}{(s-1)(s+2)}$$

请重新讨论（1）、（2）和（3）中提出的问题。

自动控制原理 2005 年真题答案

注：本答案仅供参考。

一、解：（1）由图可得开环传递函数

$$G(s)=\frac{K\left(\frac{s}{\omega_1}+1\right)}{s^2\left(\frac{s}{\omega_2}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_3}+1\right)}$$

下面来求取 K。

设$\omega=\omega_1$时，$L=L_A$，结合$\omega=1$时，$L=20\lg K$，得

$$\begin{cases}-40(\lg\omega_1-\lg 1)=L_A-20\lg K\\ -20(\lg\omega_1-\lg\omega_c)=L_A-0\end{cases}\Rightarrow 20\lg K-40\lg\omega_1=20\lg\frac{\omega_c}{\omega_1}$$

$$\Rightarrow K=\omega_c\omega_1$$

$$\therefore G(s)=\frac{\omega_c\omega_1\left(\frac{s}{\omega_1}+1\right)}{s^2\left(\frac{s}{\omega_2}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_3}+1\right)}$$

（2）闭环系统相位稳定裕量

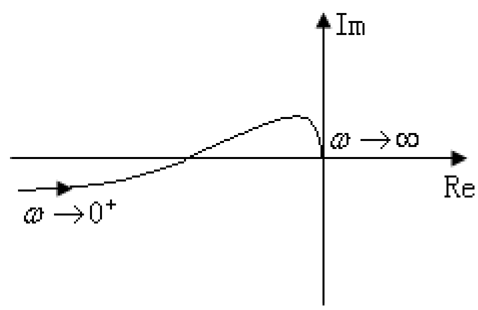
$$\gamma=180^\circ+\varphi(\omega_c)=180^\circ+\arctan\frac{\omega_c}{\omega_1}-\arctan\frac{\omega_c}{\omega_2}-\arctan\frac{\omega_c}{\omega_3}-180^\circ$$

$$=\arctan\frac{\omega_c}{\omega_1}-\arctan\frac{\omega_c}{\omega_2}-\arctan\frac{\omega_c}{\omega_3}$$

当$\omega_c/\omega_1=100$，$\omega_c/\omega_2=2$，$\omega_c/\omega_3=0.1$时，$\gamma=20.28^\circ$

此时闭环系统稳定。

Nyquist 图的大致形状如下图：



（3）由于系统是 II 型系统，$\therefore$对于$r(t)=bt$，稳态误差为 0

对于$r(t)=\frac{1}{2}ct^2$，　　$K_\alpha=\lim_{s\to 0}s^2G(s)=K=\omega_1\omega_c$

$$\therefore e_{ss2}=\frac{c}{K_\alpha}=\frac{c}{\omega_1\omega_c}$$

稳态误差　　$e_{ss}=e_{ss1}+e_{ss2}=0+\frac{c}{\omega_1\omega_c}=\frac{c}{\omega_1\omega_c}$

二、解：（1）系统特征方程为　$s(s+2)+10(K_ts+1)=0$

$$s^2+2s+10+10K_ts=0$$

$$1+\frac{10K_ts}{s^2+2s+10}=0$$

等效开环传函 $G'(s)=\dfrac{Ks}{s^2+2s+10}$ （K=10 K_t）

绘制根轨迹步骤如下：

①开环极点 $p_1=-1+3j$， $p_2=-1-3j$ 数目 n=2；

开环零点 $z=0$，数目 m=1。系统有两条根轨迹。

②实轴上根轨迹段为$(-\infty,\ 0)$；

③渐近线与实轴夹角为 $\varphi_a=\pm\pi$；

④由 $\dfrac{1}{d+1-3j}+\dfrac{1}{d+1+3j}=\dfrac{1}{d}$

$\Rightarrow$ 分离点 $d=\pm\sqrt{10}$

$\because d=\sqrt{10}$ 时，$K=-\dfrac{20+2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$ $\therefore$ 舍去

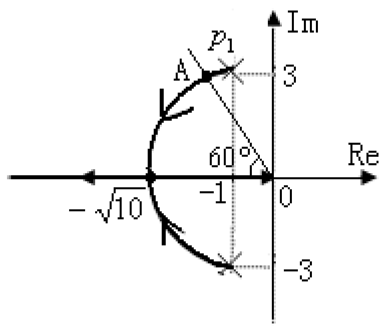
分离点 $d=-\sqrt{10}$

⑤从复极点-1+j3 出发的根轨迹的出射角为

$$\theta=\arctan(-3)-90°+180°=180°-\arctan3+90°=198.4°$$

从复极点-1-j3 出发的根轨迹的出射角为 $-198.4°$。

由以上计算得到的参数，得根轨迹如图所示：



（2）欲使超调量 $\sigma\%=e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}\le16.3\%$，应有 $\zeta\ge0.5$

由 $\zeta=\cos\beta$，得 $\beta\le60°$

过坐标原点做与负实轴夹角为$60°$的直线，交根轨迹于 A 点。设 A 点坐标为$(\sigma,\ \omega)$，显然$\omega=-\sqrt{3}\sigma$，将其代人特征方程$s^2+2s+10+10K_ts=0$，可得

$$\begin{cases}\sigma^2-\omega^2+(2+10K_t)\sigma+10=0\\(2\sigma+2+10K_t)\omega=0\\\omega=-\sqrt{3}\sigma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma=-1.58\\\omega=2.74\\K_t=0.12\end{cases}$$

即当$K_t\geq0.12$时，可使$\sigma\%\leq16.3\%$，闭环极点从（$-1.58\pm j2.74$）开始，沿根轨迹方向移动。

三、（1）

解：依题意得，

$$f(s,\lambda)=(1-\lambda)f_1(s)+\lambda f_2(s)=(1-\lambda)(s^3+6s^2+12s+8)+\lambda(s^3+3s^2+4s+2)$$

$$=s^3+(6-3\lambda)s^2+(12-8\lambda)s+8-6\lambda$$

列 Routh 表如下：

$$\begin{array}{lll}s^3 & 1 & 12-8\lambda\\ s^2 & 6-3\lambda & 8-6\lambda\\ s^1 & \dfrac{24\lambda^2-78\lambda+64}{6-3\lambda} & \\ s^0 & 8-6\lambda & \end{array}$$

对所有的$\lambda\in[0,1]$，有$6-3\lambda>0$　$\dfrac{24\lambda^2-78\lambda+64}{6-3\lambda}>0$　$8-6\lambda>0$

$\therefore$对所有$\lambda\in[0,1]$，$f(s,\lambda)$均稳定。

（2）

解：$$f(s,\lambda)=(1-\lambda)f_1(s)+\lambda f_2(s)=(1-\lambda)(s^3+6s^2+12s+8)+\lambda(s^3+3s^2+4s+2)$$

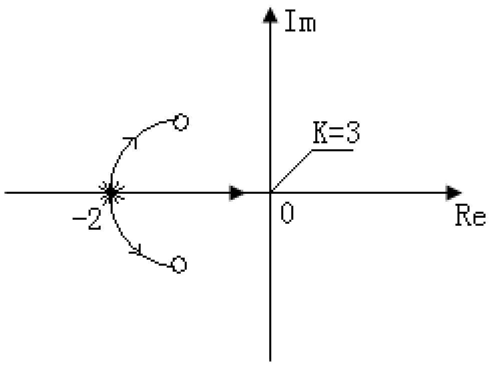
$$=s^3+(6-3\lambda)s^2+(12-8\lambda)s+8-6\lambda$$

$$s^3+(6-3\lambda)s^2+(12-8\lambda)s+8-6\lambda=0\Rightarrow s^3+6s^2+12s+8-(3s^2+8s+6)\lambda=0$$

$\Rightarrow1+\dfrac{-\lambda(3s^2+8s+6)}{s^3+6s^2+12s+8}=0$ 即等效开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{-\lambda\left(3s^2+8s+6\right)}{s^3+6s^2+12s+8}=\frac{-3\lambda\left(s+\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}j\right)\left(s+\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}j\right)}{(s+2)^3}$$

设 $K=3\lambda$，$G(s)=\dfrac{-K\left(s+\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}j\right)\left(s+\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}j\right)}{(s+2)^3}$，根轨迹图如图所示：



根轨迹与虚轴的交点处 K 为：

$$K=\left|\frac{(s+2)^3}{s^2+\frac{8}{3}s+2}\right|_{s=0}=3$$

此时，$\lambda=1$，当 $0\le\lambda\le1$ 时，由根轨迹可知，$f(s,\ \lambda)$ 均稳定。

四、解：（1）系统开环脉冲传递函数

$$G(z)=\mathrm{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\bullet\frac{5}{s(s+1)}\right]=5\left(1-z^{-1}\right)\mathrm{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=5\left(1-z^{-1}\right)\mathrm{Z}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right]$$

$$=5\left(1-z^{-1}\right)\bullet\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-e^{-T}}\right]=\frac{K\left[\left(T-1+e^{-T}\right)z+\left(1-e^{-T}-Te^{-T}\right)\right]}{(z-1)\left(z-e^{-T}\right)}$$

当 T=1s 时，

$$G(z)=\frac{5(0.368z+0.264)}{(z-1)(z-0.368)}=\frac{1.825z+1.32}{z^2-1.368z+0.368}$$

（2）当 $D(z)=1$ 时，闭环传递函数

$$\Phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{1.825z+1.32}{z^2+0.457z+1.688}$$

系统 z 特征方程为：

$$D(z)=z^2+0.457z+1.688=0$$

用 Routh 判据来判断系统的稳定性：

令 $z=\frac{\omega+1}{\omega-1}$，得 $D(\omega)=2.231\omega^2-1.376\omega+3.145=0$

所以闭环系统不稳定。

（3）可设 $G_e(z)=\frac{z-1}{z}$，　　则 $\Phi(z)=\frac{1}{z}(满足r-l\geq n-m)$

则 $$D(z)==\frac{\Phi(z)}{G(z)G_e(z)}=\frac{1}{G(z)(z-1)}=\frac{0.548(z-0.368)}{z+0.273}$$

$$C(z)=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}R(z)=\frac{1}{z-1}=z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots$$

可见调节时间为 1 拍，即 1 个采样周期。

五、解：（1）由已知得 $$-\frac{1}{N(X)}=-\frac{\pi X}{4}\sqrt{1-\left(\frac{h}{X}\right)^2}-j\frac{\pi h}{4}$$

负倒特性曲线如图 7.9 所示：

$$G(j\omega)=\frac{20}{j\omega(0.1j\omega+1)}=\frac{-2}{1+0.01\omega^2}-j\frac{20}{\omega(1+0.01\omega^2)}$$

$G(j\omega)$曲线如图 7.9 所示：

由图可知，负倒特性曲线与$G(j\omega)$曲线有交点。所以存在自持振荡，

并且是稳定的自持振荡。（由不稳定区$\rightarrow$稳定区）

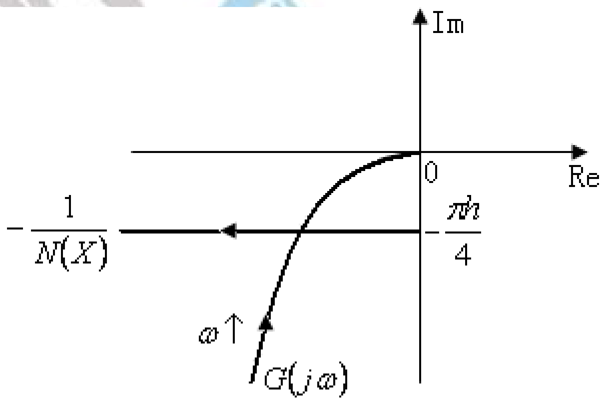


图 7.9 系统$-\frac{1}{N(X)}$曲线和$G(j\omega)$曲线

（2）由$-\dfrac{1}{N(X)}=G(j\omega)$，得

$$\begin{cases} \dfrac{\pi h}{4}=\dfrac{20}{\omega(1+0.01\omega^2)} \\ \dfrac{\pi X}{4}\sqrt{1-\left(\dfrac{h}{X}\right)^2}=\dfrac{2}{1+0.01\omega^2} \end{cases}$$

由①得，$h=\dfrac{80}{\pi\omega(1+0.01\omega^2)}$　当$\omega\geq 20$时，$h\leq\dfrac{0.8}{\pi}=0.255$

由①、②得，$\dfrac{10\sqrt{X^2-h^2}}{\omega}=h\Rightarrow h=\sqrt{\dfrac{X^2}{\dfrac{\omega^2}{100}+1}}$

当$\omega\geq 20, X\leq 0.7$时，$h\leq 0.313$

所以 h 的范围是　　　$0<h\leq 0.255$

六、解：（1）由图可知，环节 A 的传递函数为：$G_A(s)=K$；

环节 B 的传递函数为：$G_B(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$；

环节 C 的传递函数为：$G_C(s)=\dfrac{1}{s}$。

开环系统的总传递函数为：$G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$，系统结构图如图 8.4 所示：

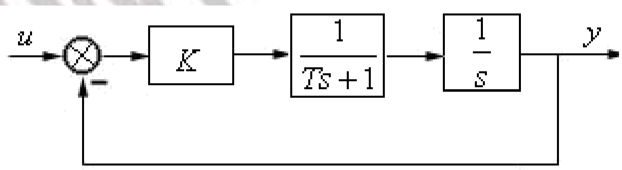


图 8.4　系统结构图

（2）把系统结构图化为图 8.5 的形式，在图 8.5 上选取状态变量x_1、x_2，可得

$$\dot{x}_1=K(u-y)=K(u-x_2)=-Kx_2+Ku$$
$$\dot{x}_2=\frac{1}{T}x_1-\frac{1}{T}x_2$$
$$y=x_2$$

即状态空间表达式为：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -K\\ \dfrac{1}{T} & -\dfrac{1}{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}K\\ 0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{cases}$$

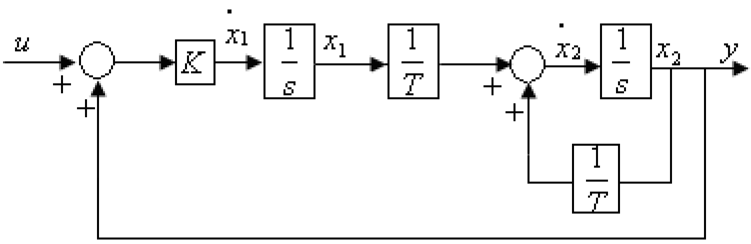


图 8.5 状态变量选取图

（3）当 $K=10, T=0.1$ 时，开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}=\dfrac{10}{s(0.1s+1)}$

可见系统是 I 型，对于单位阶跃输入，稳态误差为零。

闭环传递函数为 $\Phi(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{100}{s^2+10s+100}$

对照标准二阶闭环传递函数，有 $\zeta=0.5, \omega_n=10$

超调量： $\sigma\%=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%=16.3\%$

由 $\zeta=\cos\beta=0.5\Rightarrow\beta=60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$

上升时间： $t_r=\dfrac{\pi-\beta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=\dfrac{\pi-\dfrac{\pi}{3}}{10\sqrt{1-0.5^2}}=0.24s$

峰值时间： $t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=\dfrac{\pi}{10\sqrt{1-0.5^2}}=0.36s$

七、解：（1） $G(s)=\dfrac{3(s+1)}{(s-1)(s+2)}=\dfrac{2}{s-1}+\dfrac{1}{s+2}$

对角规范型状态空间表达式为： $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & \\ & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}x\end{cases}$

$$H(s)=\frac{s-1}{s+1}$$

对角规范型状态空间表达式为：$\begin{cases}\dot{x}=-x+u\\ y=-2x+u\end{cases}$

由题意，得 $G_1(s)=\dfrac{3(s+1)^2}{(s-1)(s+1)(s+5)}=\dfrac{3s^2+6s+3}{s^3+5s^2-s-5}$

系统的状态空间表达式为：$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\5&1&-5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}3&6&3\end{bmatrix}x\end{cases}$

（2）由$|\lambda I-A|=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=-5$，有一个具有正实部的特征值，

所以系统不稳定。

（3）由（1）中的状态空间表达式可知，为可控标准型实现

计算$rankV_o=rank\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}3&6&3\\15&6&-9\\-45&6&-39\end{bmatrix}=2$，所以系统不可观；

其实，也可根据$G_1(s)$的表达式写出其可观标准型实现，经计算，不可控。

即系统的可控、可观测性有一个被破坏（因为存在零极点相消）。

所以不存在带状态观测器的状态反馈，使系统稳定；

（4）$$G(s)=\frac{s-1}{s+1},\quad H(s)=\frac{3(s+1)}{(s-1)(s+2)}$$

同理可得，

1）$G(s)$的对角规范型为：$\begin{cases}\dot{x}=-x+u\\ y=-2x+u\end{cases}$

$H(s)$的对角规范型为：$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}1&\\&-2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}x\end{cases}$

$$G_1(s)=\frac{(s-1)^2(s+2)}{(s-1)(s+1)(s+5)}=\frac{s^3-3s+2}{s^3+5s^2-s-5}=1+\frac{-5s^2-2s+7}{s^3+5s^2-s-5}$$

系统的状态空间表达式为：$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\5&1&-5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}7&-2&-5\end{bmatrix}x+u\end{cases}$

2）由$|\lambda I-A|=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=-5$，有一个具有正实部的特征值，

所以系统不稳定。

3）由 1）中的状态空间表达式可知，为可控标准型实现

计算$rankV_o=rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix} 7 & -2 & -5 \\ -25 & 2 & 23 \\ 115 & -2 & -113 \end{bmatrix}=2$，所以系统不可观；

其实，也可根据$G_1(s)$的表达式写出其可观标准型实现，经计算，不可控。

即系统的可控、可观测性有一个被破坏（因为存在零极点相消）。

所以不存在带状态观测器的状态反馈，使系统稳定；