★ 答卷须知
试题答案必须书写在答题纸上，在试题和草稿纸上答题无效。

北京理工大学

2005年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：447 科目名称：高等代数

一.（10分） 已知三个函数 $f(x),g(x),h(x)$ 均连续且可导，证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0。$$

二.（15分） 已知线性方程组

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+(a+3)-3z=3 \\ -2x+(a-1)y+bz=a-1 \end{cases},$$

讨论 a,b 取何值时，方程组无解，有惟一解，有无穷多解，并对每一种情况作出相应的几何解释，在有解时求出其全部解。

三.（15分） 一个矩阵称为行（列）满秩矩阵，如果它的行（列）向量组是线性无关的。

（1） 证明：如果一个 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，那么有 $m\times r$ 的列满秩矩阵 B 和 $r\times n$ 的行满秩矩阵 C，使得 $A=BC$。我们称 $A=BC$ 为矩阵 A 的满秩分解表达式。

（2） 利用（1）求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 36 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 & 27 \\ 6 & 12 & 1 & 7 & 5 & 73 \end{bmatrix}$$

的满秩分解表达式。

（3） 如果已知一个$m\times n$矩阵A的秩为r，$A=BC$为其满秩分解表达式，证明：$AX=0$与$CX=0$是同解的线性方程组。

四.（15分） 设A是一个3阶正交矩阵，且$|A|=1$。

（1） 证明：$\lambda=1$必为A的特征值。

（2） 证明：存在正交矩阵Q，使得

$$Q^TAQ=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}。$$

五.（15分） 设A是n阶正定矩阵，B是n阶实对称矩阵，证明：存在n阶可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},P^{-1}BP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix},$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$|\lambda A-B|=0$的根。

六.（15分） 设A为数域F上的n阶矩阵，$f(x),g(x)\in F[x]$，证明：如果$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式，那么齐次线性方程组$d(A)X=0$的解空间等于$f(A)X=0$的解空间与$g(A)X=0$的解空间的交集。

七.（20分） 设V是复数域C上的n维线性空间，$m(\lambda)$为V的线性变换$\underline{A}$的

最小多项式，且有标准分解式

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\in C$ 且彼此互异。

（1） 证明：$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$，其中

$$W_i=Ker(\underline{A}-\lambda_i\underline{I})^{r_i}=\{\alpha\in V\,|\,(\underline{A}-\lambda_i\underline{I})^{r_i}\alpha=0\}$$

称为属于 λ_i 的根子空间，$i=1,2,\cdots,s$。

（2） 证明：$\underline{A}|W_i$ 的最小多项式为 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$，$i=1,2,\cdots,s$。

（3） 特别地，设 V 是复数域 C 上的3维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 V 的一组基，线性变换 $\underline{A}$ 在这组基下的矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{bmatrix},$$

求 $\underline{A}$ 的特征值及其根子空间。

八.（15 分） 设 V_1,V_2 是两个欧氏空间，$\underline{A}$ 是 V_1 到 V_2 的一个线性映射，如果 $\underline{A}$ 满足：（1）对任意 $\alpha,\beta\in V_1$ 都有 $(\underline{A}\alpha,\underline{A}\beta)=(\alpha,\beta)$；（2）$\underline{A}$ 是一个双射，那么称 $\underline{A}$ 是 V_1 到 V_2 的一个等距映射。

（1） 请你作出等距映射的几何解释。

（2） 设 $V_1=R^3$ 按照标准内积定义构成欧式空间，R 上的3阶反对称矩阵全体 V_2 按照如下定义也构成欧氏空间：$(A,B)=\dfrac{1}{2}Tr(A^TB)$，现在定义映射如下

$$\underline{A}: V_1 \longrightarrow V_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix},$$

证明：$\underline{A}$是V_1到V_2的一个等距映射。

九.（15 分） 写出你所知道的与线性方程组，矩阵，线性空间有关的等价关系，并解释它们的具体含义。

十.（15 分） 写出你所知道的复数域C上的n阶方矩阵A可以对角化的充分必要条件。