

# 北京理工大学

## 2006 年自动控制理论考试试题

### 一、根轨迹方法

(25 分)

单位反馈系统如图 1，其中  $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$ 。为简便起见，图中用 R 表示  $r(t)$  的 Laplace 变换  $R(s)$ 。其余的符号和以后的图均采用这种简便记法。

Laplace 变换  $R(s)$ 。其余的符号和以后的图均采用这种简便记法。

(1) 设  $G_c(s) = K$ ，画出根轨迹图；

(2) 确定 K 的值，使闭环系统单位阶跃响应的最大超调量为  $M_p = e^{-\pi}$ 。计算相应的上升时间  $t_r$ ；

(3) 设计控制器  $G_c(s) = \frac{K_c \alpha (Ts+1)}{\alpha Ts+1}$  使最大超调量  $M_p$  保持不变，上升时间为  $t_r = \frac{3\pi}{8}$ ，并使闭环系统尽可能地简单。

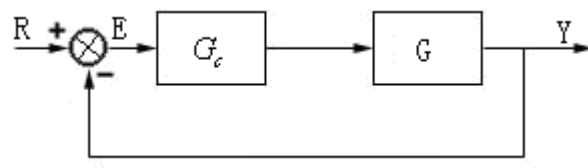


图 1：单位反馈系统

### 二、状态空间方法

(30 分)

考虑系统 
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1)$$

先设 
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

(i) 证明：若  $f(s) = s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)^2$ ，其中  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，则可通过状态空间中的线性变换  $\hat{x} = Tx$ ，将状态空间表达式 (1) 变为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + Du \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\hat{A} = J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

T 可取为  $T = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}$

(ii) 设  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

求  $e^{Jt}$  和  $e^{At}$ 。

(iii) A 同 (ii),  $B = [1 \ 1 \ 0]^T, C = [0 \ 0 \ 1]$

判断系统的可控性和可观测性。若系统不可控或不可观测，确定不可控或不可观测的模式；

(iv) A, B, C 同 (iii),  $D=0, x(0) = [1 \ -1 \ 1]^T, x(t)$  是状态方程在初态  $x(0)$  下的解，证明  $x^T(0)x(t) = 3e^{-t}\nabla u(t), t \geq 0$ ，并解释这个结果。

(v) 又设  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

B, C, D 待定。若要通过状态反馈  $u(t) = Kx(t)$  配置系统的极点，至少需要几个独立的控制变量（即 B 至少要有几个线性无关的列向量）？请说明理由。  
 若要通过状态反馈  $u(t) = Kx(t)$  使闭环系统渐近稳定，至少需要几个独立的控制变量？请说明理由。

### 三、频率响应分析

(25 分)

考虑图 2 所示的控制系统，其中  $G_c(s), G_1(s)$  和  $G_2(s)$  均为最小相位系统，其渐近对数幅频特性曲线如图 3， $H(s)=1$ 。

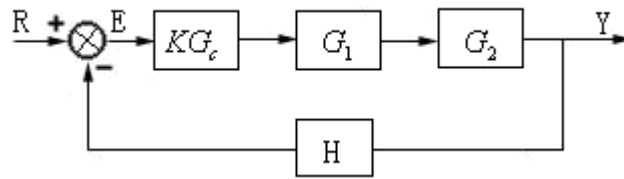


图 2: 由三个最小相位环节构成的反馈控制系统

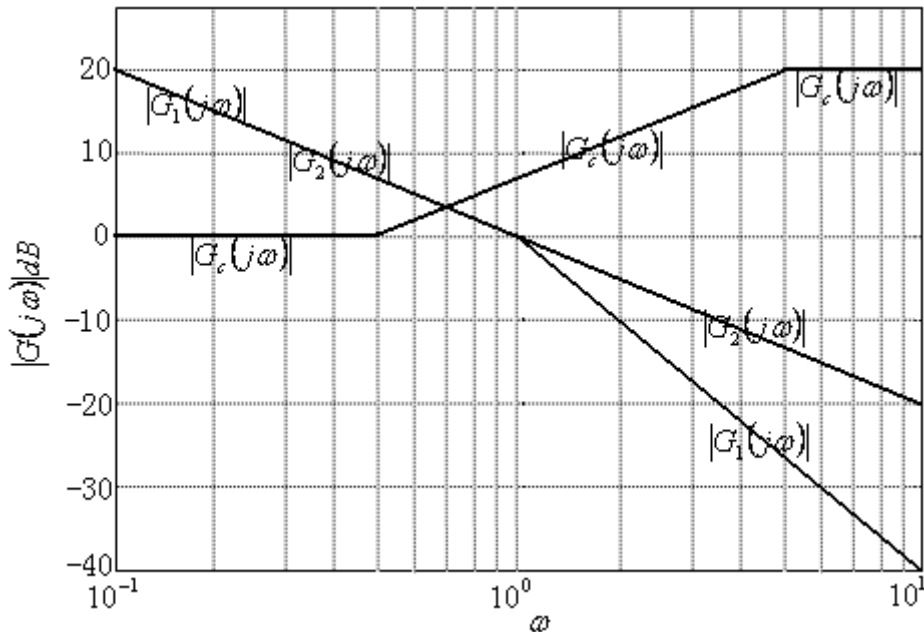


图 3: 渐近对数幅频特性曲线

- (1) 确定开环传递函数  $G_0(s) = G_c(s)G_1(s)G_2(s)H(s)$  并画出其渐近对数幅频和相频特性曲线 (要求按图 3 中的尺寸自制两张对数坐标纸);
- (2) 画出 Nyquist 曲线  $G_0(j\omega)$ ;
- (3) 由 Nyquist 曲线确定使闭环系统稳定的 K 值, 并用根轨迹方法验证;
- (4) 求  $K=1$  和  $K=2$  时的稳态误差和加速度误差。

#### 四、非线性控制系统

(25 分)

系统的方框图如图 4 所示, 其中  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1$ ,  $M_2 = M_3 = 1$ ,  $K_1 = 1$ , 所有的非线性特性均关于原点中心对称,  $G(s) = \frac{s+1}{s^2}$ 。画出负倒特性曲线和线性部分  $G(s)$  的 Nyquist 图, 以此分析系统是否存在自激振荡及其稳定性; 如果存

在自激振荡，请计算输出  $y(t)$  的振幅和频率。图中死区、饱和特性和继电器特性等非线性环节的描述函数分别为：

$$N_1(X) = \frac{2K_1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta_1}{X} - \frac{\Delta_1}{X} \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta_1}{X} \right)^2} \right], \quad X \geq \Delta_1$$

$$N_2(X) = \frac{2K_2}{\pi} \left[ \arcsin \frac{\Delta_2}{X} + \frac{\Delta_2}{X} \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta_2}{X} \right)^2} \right], \quad X \geq \Delta_2$$

$$N_3(X) = \frac{4M_3}{\pi X} \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta_3}{X} \right)^2} - j \frac{4M_3 \Delta_3}{\pi X^2}, \quad X \geq \Delta_3$$

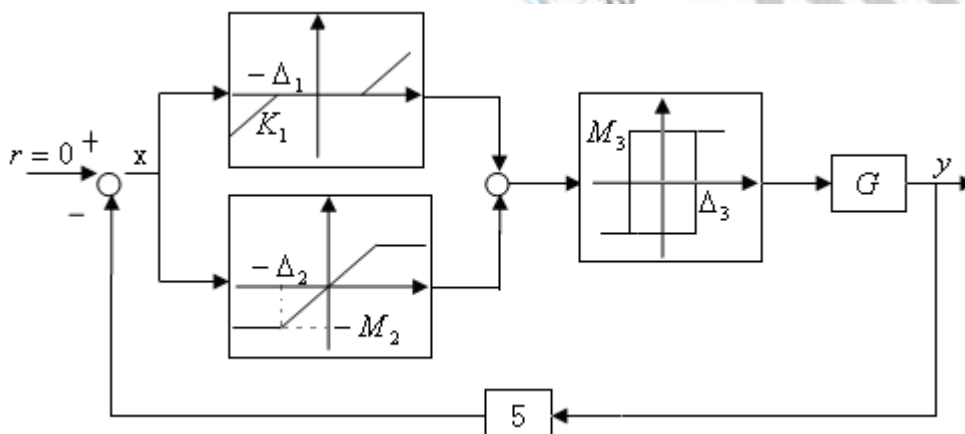


图 4：具有非线性特性的反馈控制系统

## 五、离散控制系统

(25 分)

考虑如图 5 所示的直流电机速度控制系统，ZOH 表示零阶保持器。设模拟被控对象的传递函数如下：

$$G_p(s) = \frac{261714.877}{(s + 297.456)(s + 879.844)}$$

数字控制器由微处理器实现，其脉冲传递函数为

$$D(z) = K_p + \frac{K_R T}{2} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)$$

式中， $T = 0.001s$ 、 $K_p = 1$  和  $K_R = 295.276$

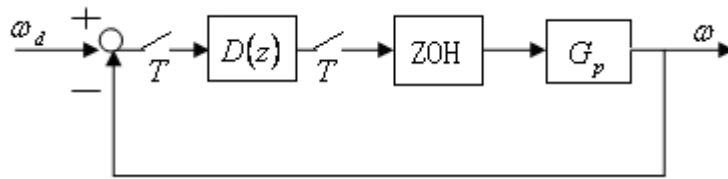


图 5: 直流电机速度控制系统的框图

- (1) 求数字控制系统的开环和闭环脉冲传递函数;
- (2) 判断整个控制系统的稳定性;
- (3) 当  $\omega_d$  为单位阶跃函数时, 求数字系统在采样时刻的输出响应;
- (4) 重新设计数字控制器  $D(z)$ , 使数字系统对单位阶跃输入具有最小拍输出响应。

常用函数的  $z$ -变换表:

$$\frac{1}{s} \Leftrightarrow \frac{z}{z-1}; \quad \frac{1}{s+\alpha} \Leftrightarrow \frac{z}{z-e^{-\alpha T}}; \quad \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

## 六、Lyapunov 稳定性

(20 分)

设非线性系统的数学描述如下:

$$\dot{x} + x + x^2 - 1 = 0$$

- (i) 写出系统的状态方程;
- (ii) 求系统的所有平衡点;
- (iii) 判断每一个平衡点在 Lyapunov 意义下的稳定性, 并阐明理由。

## 自动控制原理 2006 年真题答案

注: 本答案仅供参考。

一、解: (1) 系统的开环传函  $G_0(s) = \frac{K}{s(s+2)}$

绘制根轨迹的步骤如下:

① 开环极点  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -2$  数目  $n=2$ ; 无零点

系统有两条根轨迹，分别起始于  $p_1, p_2$ ，终止于无穷远处。

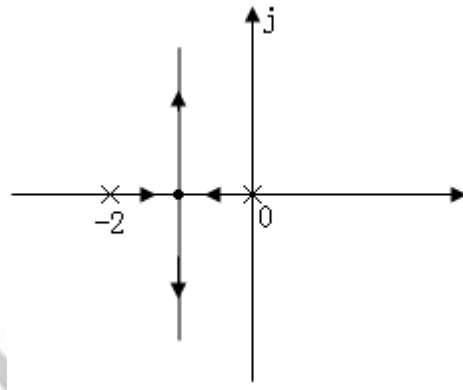
②实轴上根轨迹段为  $(-2, 0)$ ;

③渐近线与实轴夹角为  $\varphi_a = \pm 90^\circ$ ;

渐近线与实轴交点为  $\sigma_a = \frac{0-2}{2} = -1$ ;

④由  $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} = 0$   
 $\Rightarrow$  分离点  $d = -1$

由以上计算得到的参数，得根轨迹如图所示：



(2) 由  $M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-\pi} \Rightarrow \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$

闭环传递函数为  $\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$

由  $\begin{cases} 2\zeta\omega_n = 2 \\ K = \omega_n^2 \\ \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 2 \\ \omega_n = \sqrt{2} \end{cases}$

上升时间  $t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{3}{4}\pi$

(3) 要保持  $M_p$  不变，即  $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，结合  $t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{3}{8}\pi$ ，得到  $\omega_n = 2\sqrt{2}$

由题意得,  $G_c(s) = \frac{K_c \left( s + \frac{1}{T} \right)}{s + \frac{1}{T\alpha}}$

开环传递函数  $G_0'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{K_c \left( s + \frac{1}{T} \right)}{s + \frac{1}{T\alpha}} \cdot \frac{1}{s(s+2)}$

为使闭环系统尽可能简单, 取  $\frac{1}{T} = 2$ , 即  $T = 0.5$ , 此时  $G_0'(s) = \frac{K_c}{s \left( s + \frac{2}{\alpha} \right)}$

由  $\begin{cases} K_c = \omega_n^2 = 8 \\ \frac{2}{\varepsilon} = 2\zeta\omega_n = 4 \Rightarrow \alpha = 0.5 \end{cases}$ , 所以  $G_c(s) = \frac{8(s+2)}{s+4}$

二、解: (i)  $\hat{x} = Tx$ , 则  $x = T^{-1}\hat{x}$  代入 (1) 可得

$$\begin{cases} T^{-1}\dot{\hat{x}} = AT^{-1}\hat{x} + Bu \\ y = CT^{-1}\hat{x} + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = TAT^{-1}\hat{x} + TBu \\ y = CT^{-1}\hat{x} + Du \end{cases}$$

令  $\hat{A} = TAT^{-1}$   $\hat{B} = TB$   $\hat{C} = CT^{-1}$ , 即可得到  $\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + Du \end{cases}$

由  $T = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}$ , 计算得  $\hat{A} = J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

(ii)  $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  相当于 (i) 中的  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}$  有  $a_0 = a_1 = 0$   $a_2 = 1$

则  $f(s) = s^3 + s^2 = s^2(s+1)$ , 即  $\lambda_1 = -1$   $\lambda_2 = 0$ , 此时  $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A 可通过非奇异阵 T 化为约当阵, 即  $TAT^{-1} = J$ 。 所以

$$e^{At} = T^{-1}e^{Jt}T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ e^{-t} + t - 1 & 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$(iii) \quad \text{rank}U_c = \text{rank}[B \quad AB \quad A^2B] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 < 3,$$

所以系统不完全可控;

$$\text{rank}V_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

所以系统完全可观测;

确定不可控模态是在 A 为 J 的情况下, 看 B 中的某一行是否为零。

$$\text{此题中 A 化为 } J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 时, } \hat{B} = TB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可见,  $\lambda_1 = -1$  所对应的模态为不可控模态, 即  $e^{-t}$ 。

$$(iv) \quad x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{At}Bu(t-\tau)d\tau$$

$$\begin{aligned} x^T(0)x(t) &= x^T(0)e^{At}x(0) + x^T(0)\int_0^t e^{At}Bu(t-\tau)d\tau \\ &= [1 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ e^{-t} + t - 1 & 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + [1 \quad -1 \quad 1] \cdot \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ e^{-t} + t - 1 & 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t-\tau)d\tau \\ &= 3e^{-t} + [1 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ t+1 \\ t \end{bmatrix} \int_0^t u(t-\tau)d\tau \\ &= 3e^{-t} \end{aligned}$$

$\therefore \forall u(t), t \geq 0$  都有  $x^T(0)x(t) = 3e^{-t}$ 。

$$(v) \text{ ①将 A 化为约当阵为 } \hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ B 至少要有 2 个线性无关的列}$$

向量。原因:

若要通过状态反馈  $u(t) = Kx(t)$  配置系统的极点，即保证系统完全可控。

A 对应的约当阵中出现了两个约当块对应同一特征值 -1，若要保证  $\sum(\hat{A}, \hat{B})$  状态完全可控， $\hat{B}$  中对应  $\hat{A}$  中相等特征值的全部约当块末行的那些行之间是线性无关的，即  $\hat{B}$  的第一行、第二行必须是线性无关的。

$\therefore \hat{B}$  中至少要有 2 个线性无关的列向量。

由于非奇异线性变换不改变系统的可控性， $\therefore B$  中至少要有 2 个线性无关的列向量，即至少需要 2 个独立的控制变量。

②至少需要 1 个独立的控制变量。原因：

由于特征值 -1 具有负实部，可以使系统渐近稳定。所以配置极点时只需配置特征值 0 对应的约当块。特征值 -1 对应的约当块即使不可控，也不影响系统的渐近稳定性。只配置可控部分即可， $\therefore$  至少需要 1 个独立的控制变量。

三、解：(1) 由图可知， $G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$   $G_2(s) = \frac{1}{s}$   $G_c(s) = \frac{2s+1}{0.2s+1}$  又

$\therefore H(s) = 1$

所以开环传递函数  $G_0(s) = G_c(s)G_1(s)G_2(s)H(s)$

$$= \frac{2s+1}{s^2(s+1)(0.2s+1)}$$

(2) 首先求出  $G_0(j\omega)$  得

$$G_0(j\omega) = \frac{2j\omega+1}{-\omega^2(j\omega+1)(0.2j\omega+1)}$$

$$= -\frac{1+2.2\omega^2}{\omega^2(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)} + \frac{0.4\omega^2-0.8}{\omega(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)}j$$

1) 与负实轴的交点：

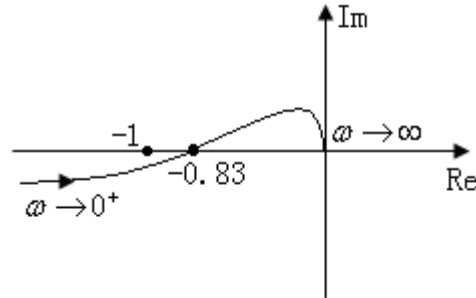
$$\text{由 } \text{Im}G_0(j\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{2}, \text{ 此时 } \text{Re}G_0(j\omega) = -0.83$$

即与负实轴的交点是  $(-0.83, 0)$ ；

2)  $\omega \rightarrow 0^+$  时， $G_0(j\omega) \rightarrow \infty \angle -180^\circ$ ；

3)  $\omega \rightarrow +\infty$ 时,  $G_0(j\omega) \rightarrow 0 \angle -270^\circ$ ;

Nyquist 曲线  $G_0(j\omega)$  如下:

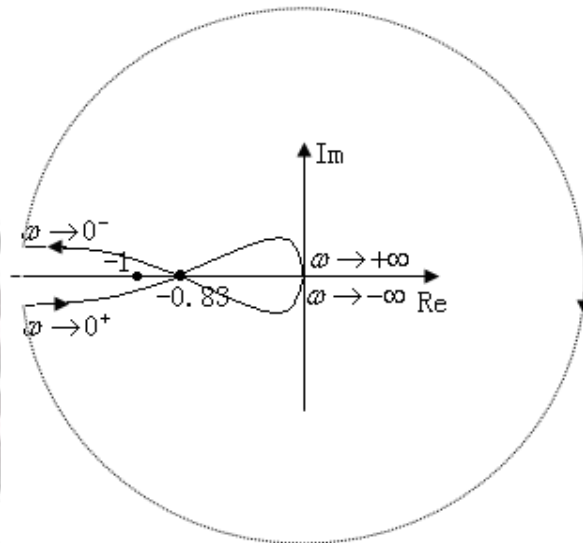


(3) 1) 由 Nyquist 曲线确定使闭环系统稳定的  $K$  值; 如图所示:

当  $-0.83K > -1$  时, 即  $K < 1.2$  时, Nyquist 曲线不包围  $(-1, j0)$  点, 即  $N=0$ , 由于  $P=0$ ,  $\therefore Z=0$ , 所以闭环系统稳定。

使系统稳定的  $K$  值范围是:

$$0 < K < 1.2$$



2) 用根轨迹方法验证:

$$KG_0(s) = \frac{K(2s+1)}{s^2(s+1)(0.2s+1)} = \frac{K^*(s+0.5)}{s^2(s+1)(s+5)} \quad (K^* = 10K)$$

绘制根轨迹步骤如下:

① 开环极点  $p_1 = p_2 = 0$ ,  $p_3 = -1$ ,  $p_4 = -5$  数目  $n=4$ ;

开环零点  $z = -0.5$ , 数目  $m=1$ 。系统有 4 条根轨迹。

②实轴上根轨迹段为 $(-\infty, -5)$ ,  $(-1, -0.5)$ ;

③渐近线与实轴夹角为 $\varphi_a = \pm \frac{3}{\pi}, \pm \pi$ ;

渐近线与实轴交点为 $\sigma_a = \frac{-1-5+0.5}{3} = -1.83$ ;

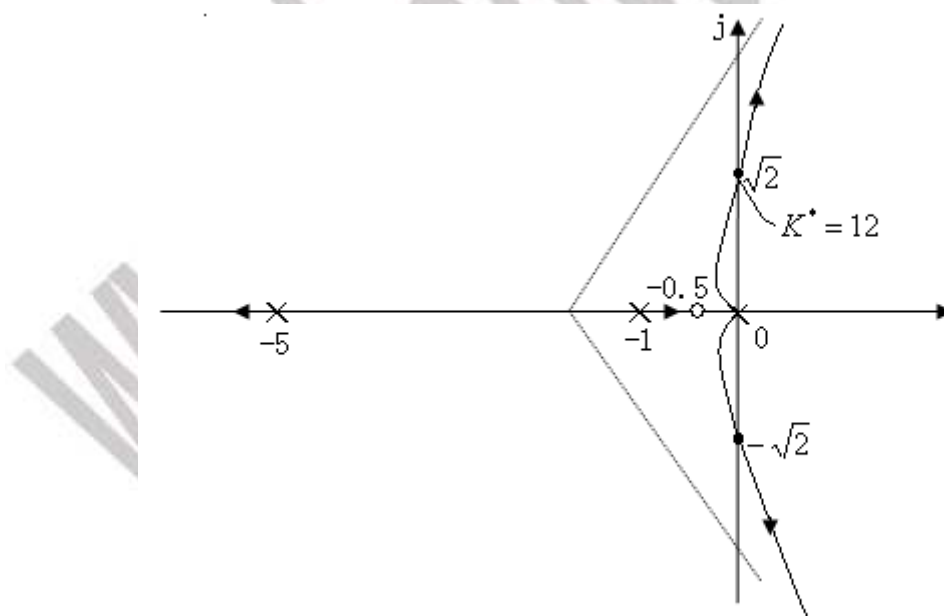
④与虚轴的交点:  $D(s) = s^4 + 6s^3 + 5s^2 + K^*s + 0.5K^*$

$s^4$	1	5	$0.5K^*$
$s^3$	6	$K^*$	
$s^2$	$\frac{30-K^*}{6}$	$0.5K^*$	
$s^1$	$\frac{K^*(12-K^*)}{30-K^*}$		
$s^0$	$0.5K^*$		

$\therefore K^* = 12$  时,  $3s^2 + 6 = 0$  得对应的  $\omega = \pm\sqrt{2}$

与虚轴的交点是  $\pm\sqrt{2}$

根据以上参数地根轨迹图如下:



由根轨迹图可知, 当  $0 < K^* < 12$ , 即  $0 < K < 1.2$  时, 闭环系统稳定。

可见, 与由 Nyquist 曲线得到的结论是一致的。

(4)  $K=1$  时, 闭环系统是稳定的, 讨论稳态误差是有意义的。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \infty$$

$$K_\alpha = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G_0(s) = 1$$

所以稳态速度误差  $e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = 0$

稳态加速度误差  $e_{ssa} = \frac{1}{K_a} = 1$

K=2 时，闭环系统不稳定，此时讨论稳态误差是无意义的。

四、解：（1）将原结构图化简可得到图 a

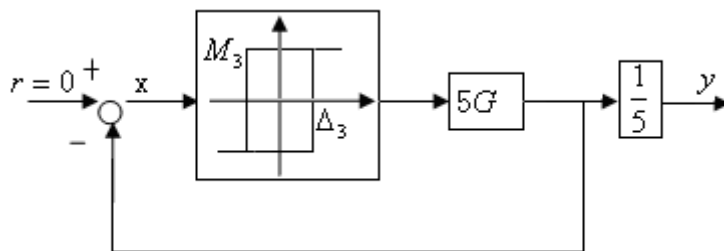


图 a 等效结构图

$$N(X) = \frac{4}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{X}\right)^2} - j \frac{4}{\pi X^2}$$

$$G_c(s) = 5G = \frac{5(s+1)}{s^2} \quad \text{频率特性} \quad 5G(j\omega) = \frac{5(j\omega+1)}{-\omega^2} = -\frac{5}{\omega^2} - \frac{5}{\omega}j$$

负倒特性曲线和  $G_c(j\omega)$  曲线如图 b 所示：

由图可知，负倒特性曲线与  $G_c(j\omega)$  曲线有交点。所以存在自激振荡，并

且是稳定的自激振荡。（由不稳定区  $\rightarrow$  稳定区）

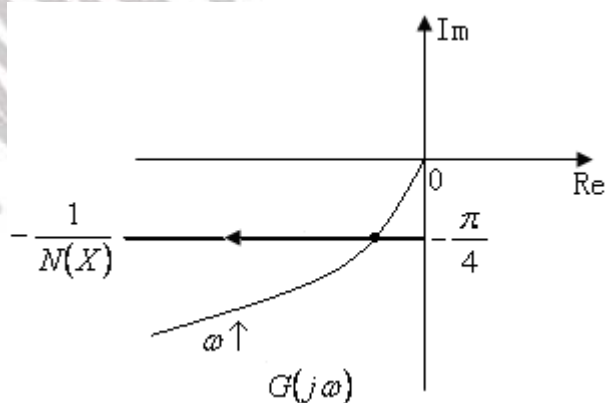


图 b 系统  $-\frac{1}{N(X)}$  曲线和  $G(j\omega)$  曲线

(2) 由  $-\frac{1}{N(X)} = G_c(j\omega)$ ，得  $-\frac{5}{\omega^2} - \frac{5}{\omega}j = -\frac{\pi}{4}\sqrt{X^2-1} - \frac{\pi}{4}j$

自激振荡的频率  $\omega = \frac{20}{\pi} = 6.4$

自振振幅  $X = \sqrt{\frac{\pi^2}{400} + 1} = 1.01$

将振幅 X 折算到输出端，考虑到  $X = -5Y$ ，所以

输出振幅为  $Y = \frac{X}{5} = 0.2$

输出频率为  $\omega = 6.4$

五、解：(1)

$$\begin{aligned} G_1(z) &= (1-z^{-1})Z\left[\frac{G_p(z)}{s}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{261714.877}{s(s+297.456)(s+879.844)}\right] \\ &= (1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1.5}{s+297.456} + \frac{0.5}{s+879.844}\right] \\ &= (1-z^{-1}) \cdot \left[\frac{z}{z-1} - \frac{1.5z}{z-e^{-297.456T}} + \frac{0.5z}{z-e^{-879.844T}}\right] \\ &= \frac{0.15z+0.03}{(z-0.7)(z-0.4)} \end{aligned}$$

开环脉冲传递函数

$$\begin{aligned} G(z) &= D(z)G_1(z) = \left[1 + \frac{0.295276}{2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right] \cdot \frac{0.15z+0.03}{(z-0.7)(z-0.4)} \\ &= \frac{0.17(z+0.2)}{(z-1)(z-0.4)} \end{aligned}$$

闭环脉冲传递函数

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.17(z+0.2)}{z^2 - 1.23z + 0.434}$$

(2) 由  $z^2 - 1.23z + 0.434 = 0 \Rightarrow z = 0.615 \pm 0.235j$

可见，闭环特征方程的根都在单位圆内部，所以整个控制系统稳定。

(3) 当  $\omega_d$  为单位阶跃函数时，输入  $R(z) = \frac{z}{z-1}$

$$\begin{aligned} C(z) &= \Phi(z)R(z) = \frac{0.17(z+0.2)}{z^2 - 1.23z + 0.434} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{0.17z(z+0.2)}{(z-1)(z^2 - 1.23z + 0.434)} \\ &= \frac{0.17z^2 + 0.034z}{z^3 - 2.23z^2 + 1.664z - 0.434} = 0.17z^{-1} + 0.41z^{-2} + 0.64z^{-3} + 0.46z^{-4} + \dots \end{aligned}$$

$$\therefore c(t) = 0.17\delta(t-T) + 0.41\delta(t-2T) + 0.64\delta(t-3T) + 0.46\delta(t-4T) + \dots$$

(4) 由于  $G(z) = \frac{0.17(z+0.2)}{(z-1)(z-0.4)}$ , 除有一个极点在单位圆上外, 所以零极点都在

单位圆内部, 故可取  $G_e(z) = \frac{z-1}{z}$ , 则  $\Phi(z) = \frac{1}{z}$  (满足  $r-l \geq n-m$ )

$$\text{则 } D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)G_e(z)} = \frac{1}{G(z)(z-1)} = \frac{5.88(z-0.4)}{z+0.2}$$

$$C(z) = \frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)} R(z) = \frac{1}{z-1} = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

可见输出  $c(k)$  在 1 拍以后就完全跟踪输入。

六、解: (i)  $\ddot{x} + \dot{x} + x^2 - 1 = 0$  令  $x_1 = x$   $x_2 = \dot{x}$ , 则

$$\text{状态方程为: } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2 + 1 \end{cases}$$

$$(ii) \text{ 由 } \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1^2 - x_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

所以系统所有的平衡点为  $(1, 0)^T$ 、 $(-1, 0)^T$ 。

(iii) ①在平衡态  $x_{e1} = (1, 0)^T$  处:

$$\text{做偏差置换, 令 } \begin{cases} y_1 = x_1 - 1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1^2 - 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$\text{将其线性化, 得 } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}_{\substack{y_1=0 \\ y_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2y_1 - 2 & -1 \end{bmatrix}_{\substack{y_1=0 \\ y_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1 + j\sqrt{7}}{2}, \lambda_2 = \frac{-1 - j\sqrt{7}}{2}$$

两个特征值均具有负的实部,  $\therefore$  平衡点  $x_{e1}$  处是渐近稳定的。

②在平衡态  $x_{e2} = (-1, 0)^T$  处:

做偏差置换，令  $\begin{cases} y_1 = x_1 + 1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1^2 + 2y_1 - y_2 \end{cases}$

将其线性化，得  $A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}_{\substack{y_1=0 \\ y_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2y_1 + 2 & -1 \end{bmatrix}_{\substack{y_1=0 \\ y_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$

有一个特征值具有正的实部， $\therefore$  平衡点  $x_{e2}$  处是不稳定的。