

★ 答卷须知

试题答案必须书写在答题纸上, 在试题和草稿纸上答题无效。

(25 分)

### 一、根轨迹方法

单位反馈系统如图 1, 其中  $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$ . 为简便起见, 图中用  $R$  表示

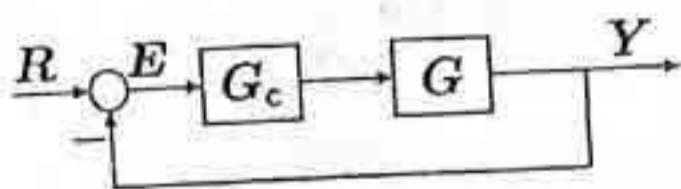


图 1: 单位反馈系统

$r(t)$  的 Laplace 变换  $R(s)$ . 其余的符号和以后的图均采用这种简便记法.

- (i) 设  $G_c(s) = K$ , 画出根轨迹图;
- (ii) 确定  $K$  的值, 使闭环系统单位阶跃响应的最大超调量为  $M_p = e^{-\pi}$ . 计算相应的上升时间  $t_r$ ;
- (iii) 设计控制器  $G_c(s) = \frac{K_c \alpha (Ts+1)}{\alpha Ts+1}$  使最大超调量  $M_p$  保持不变, 上升时间为  $t_r = \frac{3\pi}{8}$ , 并使闭环系统尽可能地简单.

(30 分)

### 二、状态空间方法

考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (1)$$

先设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}.$$

- (i) 证明: 若  $f(s) = s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)^2$ , 其中  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , 则可通过状态空间中的线性变换  $\hat{x} = Tx$ , 将状态空间表达式 (1) 变为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y &= \hat{C}\hat{x} + Du \end{aligned} \quad (2)$$

## ★ 答卷须知

试题答案必须书写在答题纸上, 在试题和草稿纸上答题无效。

科目代码: 410 科目名称: 自动控制理论

其中

$$\hat{A} = J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

$T$  可取为

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}.$$

(ii) 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

求  $e^{Jt}$  和  $e^{At}$ .

(iii)  $A$  同 (ii),

$$B = [1 \ 1 \ 0]^T, \quad C = [0 \ 0 \ 1].$$

判断系统的可控性和可观测性. 若系统不可控或不可观测, 确定不可控或不可观测的模式;

(iv)  $A, B, C$  同 (iii),  $D = 0$ ,  $x(0) = [1 \ -1 \ 1]^T$ ,  $x(t)$  是状态方程在初态  $x(0)$  下的解. 证明  $x^T(0)x(t) = 3e^{-t} \forall u(t), t \geq 0$ , 并解释这个结果.

(v) 又设

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$B, C, D$  待定. 若要通过状态反馈  $u(t) = Kx(t)$  配置系统的极点, 至少需要几个独立的控制变量 (即  $B$  至少要有几个线性无关的列向量)? 请说明理由. 若要通过状态反馈  $u(t) = Kx(t)$  使闭环系统渐近稳定, 至少需要几个独立的控制变量? 请说明理由.

## ★ 答卷须知

试题答案必须书写在答题纸上,在试题和草稿纸上答题无效。

科目代码: 410 科目名称: 自动控制理论

## 三、频率响应分析

(25 分)

考虑图 2 所示的控制系统, 其中  $G_c(s)$ ,  $G_1(s)$  和  $G_2(s)$  均为最小相位系统, 其渐近对数幅频特性曲线如图 3.  $H(s) = 1$ .

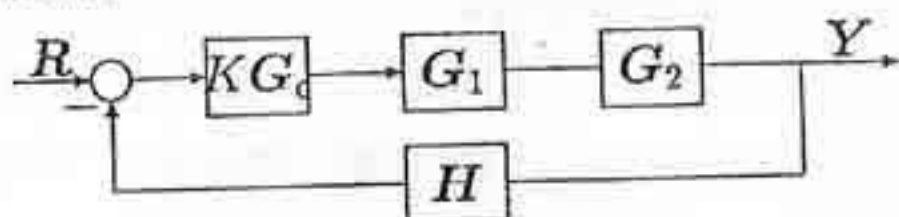


图 2: 由三个最小相位环节构成的反馈控制系统

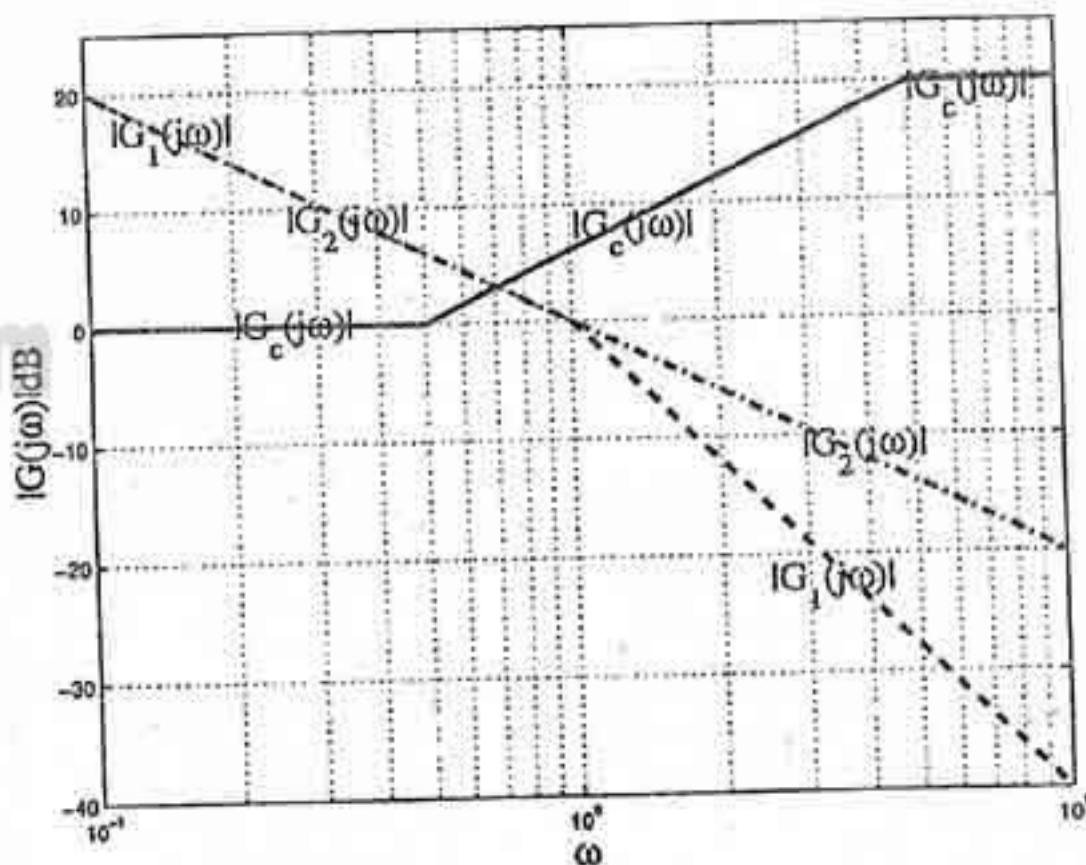


图 3: 渐近对数幅频特性曲线

- (i) 确定开环传递函数  $G_o(s) = G_c(s)G_1(s)G_2(s)H(s)$  并画出其渐近对数幅频和相频特性曲线 (要求按图 3 的尺寸自制两张对数坐标纸);
- (ii) 画出 Nyquist 曲线  $G_o(j\omega)$ ;
- (iii) 由 Nyquist 曲线确定使闭环系统稳定的  $K$  值, 并用根轨迹方法验证;
- (iv) 求  $K = 1$  和  $K = 2$  时的稳态速度误差和加速度误差。

**★ 答卷须知**

试题答案必须书写在答题纸上, 在试题和草稿纸上答题无效。

### 四、非线性控制系统

(25 分)

系统的方框图如图 4 所示, 其中  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1$ ,  $M_2 = M_3 = 1$ ,  $K_1 = 1$ , 所有的非线性特性均关于原点中心对称,  $G(s) = \frac{s+1}{s^2}$ . 画出负倒特性曲线和线性部分  $G(s)$  的 Nyquist 图, 以此分析系统是否存在自激振荡及其稳定性; 如果存在自激振荡, 请计算输出  $y(t)$  的振幅和频率. 图中死区、饱和特性和继电特性等非线性环节的描述函数分别为:

$$N_1(X) = \frac{2K_1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta_1}{X} - \frac{\Delta_1}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta_1}{X}\right)^2} \right], \quad X \geq \Delta_1$$

$$N_2(X) = \frac{2K_2}{\pi} \left[ \arcsin \frac{\Delta_2}{X} + \frac{\Delta_2}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta_2}{X}\right)^2} \right], \quad X \geq \Delta_2$$

$$N_3(X) = \frac{4M_3}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta_3}{X}\right)^2} - j \frac{4M_3 \Delta_3}{\pi X^2}, \quad X \geq \Delta_3.$$

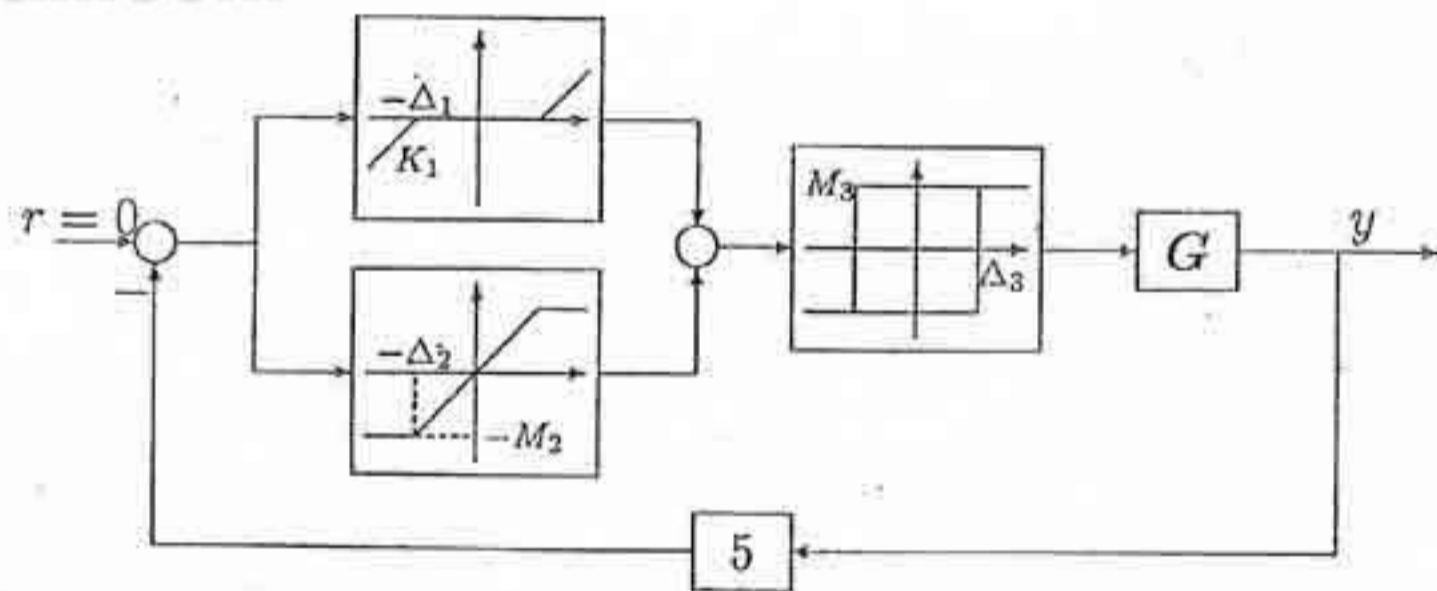


图 4: 具有非线性特性的反馈控制系统

### 五、离散控制系统

(25 分)

考虑如图 5 所示的直流电机速度控制系统, ZOH 表示零阶保持器. 设模

## ★ 答卷须知

试题答案必须书写在答题纸上,在试题和草稿纸上答题无效。

科目代码: 410 科目名称: 自动控制理论

拟被控对象的传递函数如下:

$$G_p(s) = \frac{261714.877}{(s + 297.456)(s + 879.844)}$$

数字控制器由微处理器实现,其脉冲传递函数为

$$D(z) = K_P + \frac{K_R T}{2} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)$$

式中,  $T = 0.001s$ 、 $K_P = 1$  和  $K_R = 295.276$ 。

- (i) 求数字控制系统的开环和闭环脉冲传递函数;
- (ii) 判断整个控制系统的稳定性。
- (iii) 当  $\omega_d$  为单位阶跃函数时,求数字系统在采样时刻的输出响应。
- (iv) 重新设计数字控制器  $D(z)$ ,使数字系统对单位阶跃输入具有最小拍输出响应。

常用函数的  $z$ -变换表:

$$Z(1) = 1 \quad Z\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{z}{z-1} \quad Z\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

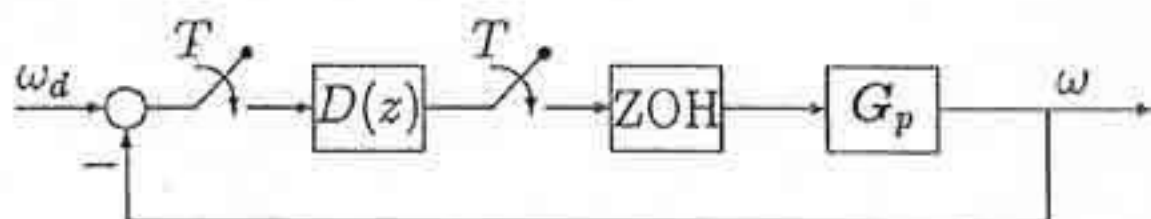


图 5: 直流电机速度控制系统的框图

## 六、Lyapunov 稳定性

(20 分)

设非线性系统的数学描述如下:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x^2 - 1 = 0.$$

- (i) 写出系统的状态方程。

## 北京理工大学

## 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

## ★ 答卷须知

试题答案必须书写在答题纸上, 在试题和草稿纸上答题无效。

科目代码: 410 科目名称: 自动控制理论

(ii) 求系统的所有平衡点。

(iii) 判断每一个平衡点在 Lyapunov 意义下的稳定性, 并阐明理由。



图 6: 对方框图的说明