北京理工大学

2007 年自动控制理论考试试题

一、选择填空（每小题 10 分，共 60 分）

1 采样系统的特征方程为$D(z)=z^2+(2K-1.75)z+2.5=0$，使系统稳定的 K 值是（ ）

（a）$K\geq 2.63$

（b）$0<K\leq 2.63$

（c）所有$K>0$

（d）不存在这样的K值。

2 采样系统的输出$y(kT)$的$z-$变换为$Y(z)=\dfrac{z^3+2z^2+2}{z^3-25z^2+0.6z}$，则前四个采样时刻的输出为（ ）

（a）$y(0)=0, y(T)=27, y(2T)=47, y(3T)=60.05$

（b）$y(0)=1, y(T)=27, y(2T)=674.4, y(3T)=16845.8$

（c）$y(0)=1, y(T)=27, y(2T)=647, y(3T)=660.05$

（d）$y(0)=1, y(T)=647, y(2T)=47, y(3T)=27$

3 s-域的传递函数为$G(s)=\dfrac{10}{s(s+2)(s+6)}$，T 为采样周期。经采样后 z-域的脉冲传递函数$\hat{G}(z)$是（ ）

（a）$\hat{G}(z)=\dfrac{5}{6}\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{5}{4}\dfrac{z}{z-e^{-6T}}+\dfrac{5}{12}\dfrac{z}{z-e^{-T}}$

（b）$\hat{G}(z)=\dfrac{5}{6}\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-e^{-6T}}+\dfrac{5}{12}\dfrac{z}{z-e^{-T}}$

（c）$\hat{G}(z)=\dfrac{5}{6}\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{5}{4}\dfrac{z}{z-e^{-2T}}+\dfrac{5}{12}\dfrac{z}{z-e^{-6T}}$

（d）$\hat{G}(z)=\dfrac{1}{6}\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-e^{-2T}}+\dfrac{5}{6}\dfrac{z}{z-e^{-6T}}$

4 线性系统的单位斜坡响应为$y(t)=t-4+4e^{-t/4}$，则该系统的单位阶跃响应为

________，该系统的传递函数为________。

5　最小相位系统的开环对数幅频特性如图 1，则该系统的速度误差系数 K_v =-________，加速度误差系数 K_a =________。

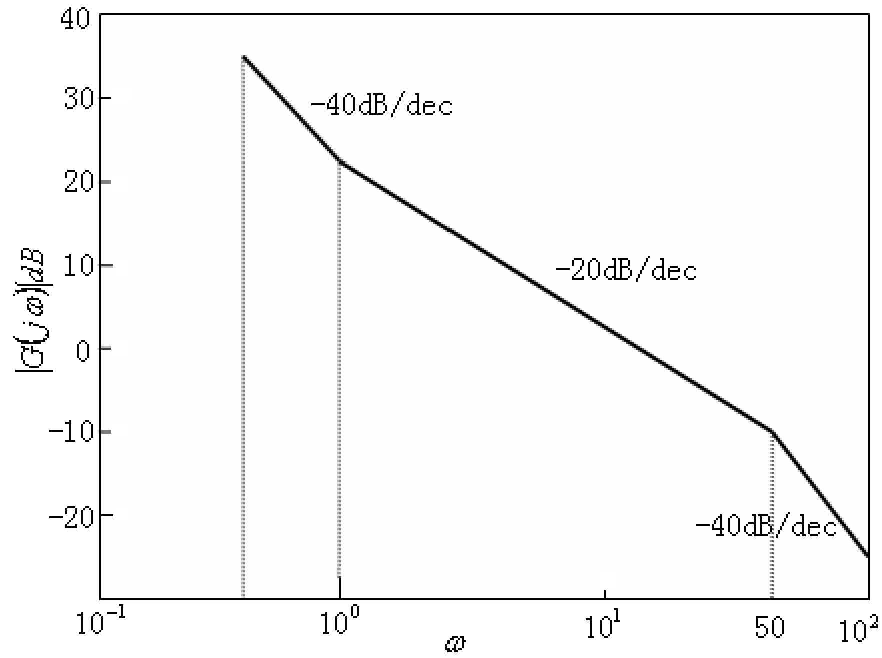


图 1：折线对数幅频特性

6　非线性系统的一个平衡态 x_e 位于不稳定的极限环内，该极限环内没有其它极限环。下述说法正确的是（　）。

（a）x_e 是不稳定平衡态。

（b）x_e 是稳定平衡态，以极限环内的点为初始状态的运动轨迹都趋于 x_e。

（c）x_e 是稳定平衡态，以极限环外的点为初始状态的运动轨迹都趋于 x_e。

（d）上述说法都不对，根本无法判定 x_e 是否稳定。

二、根轨迹方法　　（20 分）

单位反馈系统如图 2，其中 $G(s)=\dfrac{s+b}{s(s-a)}$，$a>0$，$b>0$ 为待定参数。为简便起见，图中用 R 表示 r(t)的 Laplace 变换 R(s)。其余的符号和均采用这种简便记法。

（1）设 $G_c(s)=K>0$，已知根轨迹的分离点和汇合点分别是 1 和-3。确定参数 a 和 b 并画出根轨迹图；

（2）确定根轨迹和虚轴的交点并由此确定使闭环系统稳定的 K 值。

（3）说明在稳定的前提下该反馈系统和标准二阶系统的阶跃响应在快速性和超调量两方面有何不同。

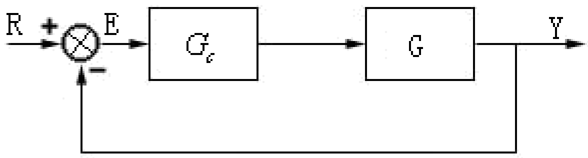


图 2：单位反馈系统

三、状态空间方法（20 分）

考虑系统
$$\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t)+bu(t) \\ y(t)=c^T x(t)+du(t) \end{cases}$$

其中 $A\in R^{3\times3}, b,c\in R^3, d\in R$

（ i ）设 $u(t)=0$，已知：若$x_1(0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$,则$x_1(t)=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0 & 0\end{bmatrix}^T$；

若$x_2(0)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$,则$x_2(t)=\begin{bmatrix}e^{-t} & e^t & 0\end{bmatrix}^T$；

若$x_3(0)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$,则$x_3(t)=\begin{bmatrix}e^{-t} & e^t+te^t & e^t\end{bmatrix}^T$，且

$$\begin{bmatrix}x_1(t) & x_2(t) & x_3(t)\end{bmatrix}=e^{At}\begin{bmatrix}x_1(0) & x_2(0) & x_3(0)\end{bmatrix}$$

确定状态转移矩阵 e^{At} 和系统矩阵 A。

（ ii ）设

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix},\ c^T=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$$

$\lambda_1\neq\lambda_2$，确定$(A，b)$的可控性和$b_1，b_2，b_3$的关系，以及$(A，c^T)$的可观测性和$c_1\quad c_2\quad c_3$的关系。

四、频率法（20 分）

考虑图 2 所示的控制系统，其中$G(s)=\dfrac{1}{s(s-a)}, a>0$。

（1）用 Nyquist 稳定性判据证明闭环系统对任何比例控制器$G_c(s)=K_c$都不稳

定。

（2）设$G_c(s)=K_c(1+\tau s)$为 PD 控制器。用 Nyquist 判据确定使闭环系统稳定的K_c和τ的值。

五、离散控制系统 （20 分）

离散系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} x(k+1)=Ax(k)+bu(k) \\ y(k)=c^T x(k) \end{cases}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -2.25 & -3 \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,\ c^T=\begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（i）判断系统的稳定性。

（ii）令$u(k)=r(k)+f^T x(k)$，求状态反馈阵f使闭环系统的极点为-0.5，0.5，0。

六、Lyapunov 稳定性 （10 分）

设非线性系统的数学描述如下：

$$\ddot{y}+\dot{y}+\sin \pi y=0$$

（i）写出系统的状态方程；

（ii）求系统的所有平衡点；

（iii）判断每一个平衡点在 Lyapunov 意义下的稳定性，并阐明理由。

自动控制原理 2007 年真题答案

注：本答案仅供参考。

一、1. d　2. b　3. c

4 解：单位阶跃输入 r(t)=1 是单位斜坡输入 r(t)=t 的导数，

则单位阶跃响应是单位斜坡响应的导数，即单位阶跃响应为

$$h(t)=y'(t)=1-e^{-t/4}$$

对其做拉氏变换得，

$$H(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{4}}=\frac{1}{s(4s+1)}$$

传递函数为

$$G(s)=\frac{H(s)}{R(s)}=\frac{1}{4s+1}$$

5 解：由图可得，开环传递函数 $G(s)=\dfrac{K(s+1)}{s^2(0.02s+1)}$

$$\left.\begin{aligned}\omega=1\text{时，}L(\omega)=20\lg K\\ L(1)=20\end{aligned}\right\}\Rightarrow K=10$$

则 $$G(s)=\frac{10(s+1)}{s^2(0.02s+1)}$$

速度误差系数 $$K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)=\infty$$

加速度误差系数 $$K_a=\lim_{s\to 0}s^2G(s)=10$$

二、解：（1）系统的开环传递函数 $G_0(s)=\dfrac{K(s+b)}{s(s-a)}$

根据分离点、汇合点的计算公式

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d-a}=\frac{1}{d+b}$$

依题意，得分离点 $d_1=1$，汇合点 $d_2=-3$，代入上式

得 a=3，b=1

则开环传递函数 $$G_0(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-3)}$$

绘制根轨迹的步骤如下：

①开环极点 $p_1=0$， $p_2=3$ 数目 n=2；开环零点 $z=-1$，数目 m=1

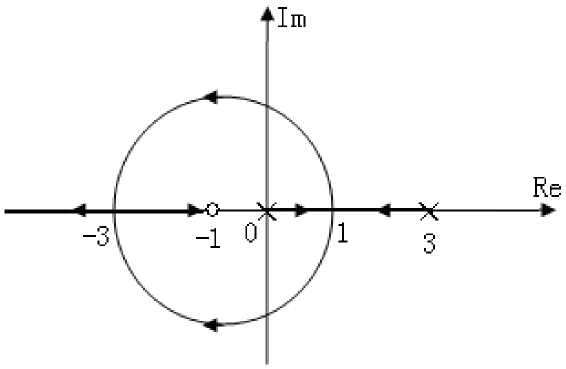
系统有两条根轨迹。

②实轴上根轨迹段为 $(-\infty,\ -1)$,$(0,\ 3)$；

③渐近线与实轴夹角为$\varphi_a = \pm\pi$；

④分离点$d_1 = 1$，汇合点$d_2 = -3$

由以上计算得到的参数，得根轨迹如图所示：



（2）根轨迹与虚轴的交点

由$1+G_0(s)=0$，得特征方程为

$$s^2+(K-3)s+K=0$$

劳斯阵：

$$\begin{array}{lcc} s^2 & 1 & K \\ s^1 & k-3 & \\ s^0 & K & \end{array}$$

要与虚轴有交点，则有一行全零，即$k-3=0 \Rightarrow K=3$

辅助方程：$s^2+3=0 \Rightarrow s_{1,2}=\pm\sqrt{3}j$

综上，与虚轴的交点是$\pm\sqrt{3}j$，使闭环系统稳定的 K 值范围应是 K>3。

（3）在稳定的前提下，该反馈系统和标准二阶系统相比，系统的阶跃响应更快，而超调量增加。

三、解：（ i ）由题意，得

$$e^{At}=[x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)][x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0)]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} & e^{-t} \\ 0 & e^{t} & e^{t}+te^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & te^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

系统矩阵 $A=\overset{\circ}{\Phi}(t)\Big|_{t=0}=\begin{bmatrix} -e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & e^{t}+te^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（ii）由于 A 为约当阵，且不同特征值对应不同的约当块。

所以要使 $(A，b)$ 可控，需满足 $b_1\neq 0$，$b_3\neq 0$；

要使 $(A，c^T)$ 可观测，需满足 $c_1\neq 0$，$c_2\neq 0$；

四、解：（1）当 $G_c(s)=K_c$ 时，开环传递函数 $G_0(s)=\dfrac{K_c}{s(s-a)}$，

为非最小相位系统（不能按原来的规则画 Nyquist 曲线）。

首先求出 $G_0(j\omega)$ 得

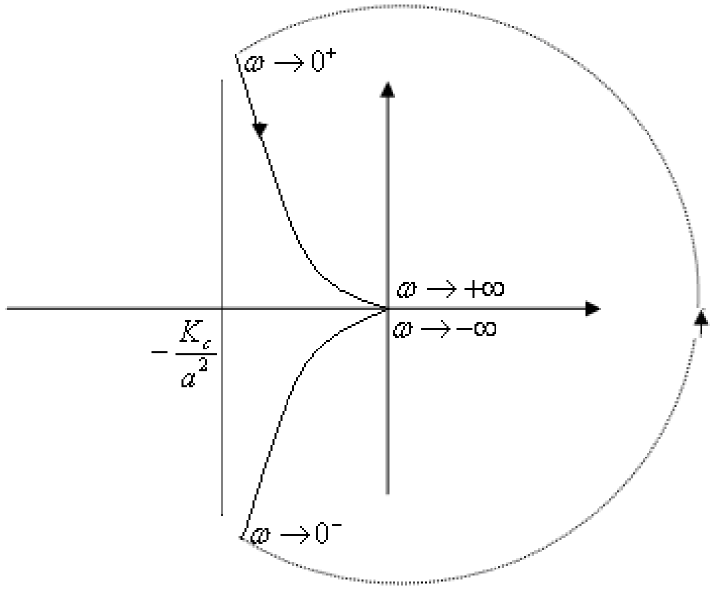
$$G_0(j\omega)=\frac{-K_c\omega+jaK_c}{\omega(\omega^2+a^2)}$$
$$=-\frac{K_c}{\omega^2+a^2}+j\frac{aK_c}{\omega(\omega^2+a^2)}$$

1）可看出与负实轴无交点；

2）$\omega\to 0^+$ 时，$G_0(j\omega)=-\dfrac{K_c}{a^2}+j\infty$；

3）$\omega\to +\infty$ 时，$G_0(j\omega)\to 0\angle -180°$；

Nyquist 曲线 $G_0(j\omega)$ 如下：



从图中可看出，N=0，又已知 P=1，所以 Z=1，即系统有右半平面的根，所以闭环系统对任何比例控制器 $G_c(s)=K_c$ 都不稳定。

（2）当 $G_c(s)=K_c(1+\tau s)$ 时，开环传递函数 $G_0(s)=\dfrac{K_c(1+\tau s)}{s(s-a)}$

首先求出 $G_0(j\omega)$ 得

$$
\begin{aligned}
G_0(j\omega) &= \frac{K_c\left[-\omega(1+a\tau)+j(a-\tau\omega^2)\right]}{\omega(\omega^2+a^2)} \\
&= -\frac{K_c(1+a\tau)}{\omega^2+a^2}+j\frac{K_c(a-\tau\omega^2)}{\omega(\omega^2+a^2)}
\end{aligned}
$$

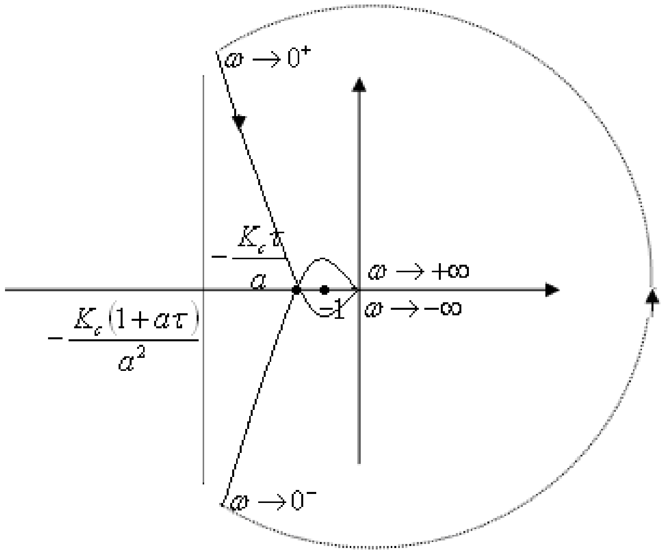
1）与负实轴的交点：令 $\operatorname{Im}G_0(j\omega)=0$，得 $\omega=\sqrt{\dfrac{a}{\tau}}$

相应地 $\operatorname{Re}G_0(j\omega)=-\dfrac{K_c\tau}{a}$

2）$\omega\to 0^+$时，$G_0(j\omega)=-\dfrac{K_c(1+a\tau)}{a^2}+j\infty$；

3）$\omega\to+\infty$时，$G_0(j\omega)\to 0\angle-90°$；

Nyquist 曲线 $G_0(j\omega)$ 如下：



从图中可看出，当$-\frac{K_c\tau}{a}<-1$时，N=1，又已知 P=1，所以 Z=0，即系统无右半平面的根，闭环系统稳定。

即K_c和τ的值应满足

$$K_c\tau > a$$

五、解：（ⅰ）由题意知，系统为可控标准型。特征多项式为

$$f(\lambda)=\lambda^3+3\lambda^2+2.25\lambda+0.5$$

可以求得，特征值幅值均小于 1，所以系统稳定。

（ⅱ）由于系统可控，所以可通过状态反馈任意配置系统的极点。

设状态反馈矩阵 $f=[f_1 \quad f_2 \quad f_3]^T$

$$A+bf^T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -0.5 & -2.25 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}[f_1 \quad f_2 \quad f_3]$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -0.5+f_1 & -2.25+f_2 & -3+f_3\end{bmatrix}$$

$$\left|sI-\left(A+bf^T\right)\right|=s^3+(3-f_3)s^2+(2.25-f_2)s+(0.5-f_1)$$

希望的特征多项式为$(s+0.5)(s-0.5)s=s^3-0.25s$

令$\left|sI-\left(A+bf^T\right)\right|=(s+0.5)(s-0.5)s$，可得

$$\begin{cases}3-f_3=0\\2.25-f_2=-0.25\\0.5-f_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_1=0.5\\f_2=2.5\\f_3=3\end{cases}$$

即将极点配置在-0.5，0.5，0 的状态反馈矩阵为 $f=\begin{bmatrix}0.5 & 2.5 & 3\end{bmatrix}^T$。

六、解：（ i ）$\overset{\circ\circ}{y}+\overset{\circ}{y}+\sin\pi y=0$ 令 $x_1=y \quad x_2=\overset{\circ}{y}$，则

状态方程为：
$$\begin{cases}\overset{\circ}{x}_1=x_2\\\overset{\circ}{x}_2=-x_2-\sin\pi x_1\end{cases}$$

（ ii ）由 $\begin{cases}\overset{\circ}{x}_1=0\\\overset{\circ}{x}_2=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_2=0\\-x_2-\sin\pi x_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\\x_2=0\end{cases}$

所以系统所有的平衡点为 $(k,\quad 0)^T$。其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

（iii）①在平衡点 $x_e=(k,\quad 0)^T$，$k=0,\pm2,\pm4,\cdots$ 处：

做偏差置换，令 $\begin{cases}y_1=x_1-k\\y_2=x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overset{\circ}{y}_1=y_2\\\overset{\circ}{y}_2=-y_2-\sin\pi(y_1+k)\end{cases}$

将其线性化，得

$$A=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\\\frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}\end{bmatrix}_{\substack{y_1=0\\y_2=0}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-\pi\cos\pi(y_1+k) & -1\end{bmatrix}_{\substack{y_1=0\\y_2=0}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-\pi\cos\pi k & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-\pi & -1\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=0\Rightarrow\lambda_1=\frac{-1+j\sqrt{4\pi-1}}{2},\quad\lambda_2=\frac{-1-j\sqrt{4\pi-1}}{2}$$

两个特征值均具有负的实部，$\therefore$ 平衡点 $x_e=(k,\quad 0)^T$，$k=0,\pm2,\pm4,\cdots$ 处是渐近稳定的。

②在平衡态 $x_e=(k,\quad 0)^T$，$k=0,\pm1,\pm3,\cdots$ 处：

做偏差置换，令 $\begin{cases}y_1=x_1-k\\y_2=x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overset{\circ}{y}_1=y_2\\\overset{\circ}{y}_2=-y_2-\sin\pi(y_1+k)\end{cases}$

将其线性化，得

$$A=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2}\end{bmatrix}_{\substack{y_1=0\\y_2=0}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\pi\cos\pi(y_1+k) & -1\end{bmatrix}_{\substack{y_1=0\\y_2=0}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\pi\cos\pi k & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \pi & -1\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=0\Rightarrow\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{4\pi+1}}{2}，\ \lambda_2=\frac{-1-\sqrt{4\pi+1}}{2}$$

有一个特征值具有正的实部，∴平衡点 $x_e=(k,\ 0)^T$，$k=0,\pm1,\pm3,\cdots$ 处是不稳定的。