1999年北京师范大学复变函数考研试题

本试卷共计五题，每题20分，满分100分。

一、填空题（每小题4分）

(1) 反演变换 $w=\frac{1}{z}$ 给出 ________ 的双方单值的映照。

(2) 线性分式映照 $w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ 若将圆周 $|z-z_0|=r$ $(r>0)$ 映为直线，其系数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 应满足条件 ________ 。

(3) 若复函数 $f(z)$ 在有限复平面内的单连通区域 D 上有连续的导数，则它在 D 上有原函数，且具有形式 ________ 。

(4) 函数 $f(z)=\frac{tg(z-1)}{z-1}$ 的奇点是 ________，它们的类型分别为 ________ 。

(5) 若复函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 内解析，且在 D 内某一段曲线上有 $f(z)=g(z)$，则在 D 内有 ________，这是根据解析函数的 ________ 。

二、计算题（5分/每小题）

(1) 求积分 $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^n} dz$，其中 n 为任意自然数.

(2) 求 $\ln \frac{z-1}{z+1}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展式。

(3) 设区域 D 为 $\operatorname{Im} z > 0$. 求出经过单叶解析映照 $f(z)$ 将 D 变换为圆 G：$|w-i|<1$ 的所有函数 $w=f(z)$ 的表达式。

(4) 求出有两个不动点 ± 1，且把单位圆内部映照到单位圆外部的所有分式线性函数。

三 证明题（10分/每小题）

(1) 设 $f(z)$ 在 $|z|\leq 1$ 上解析，$f(0)=0$，且当 $|z|=1$ 时，$|f(z)|<1$。试证：除了 $z=0$ 外，$f(z)$ 在 $|z|<1$ 内处处有 $f(z)\neq z$.

(2) 一个有限的 Blaschke 积是指具有如下形式的函数：

$$B(z)=e^{i\varphi}\prod_{j=1}^{n}\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z},\quad |z_j|<1,\ \varphi \text{实数}.$$

试证函数 $B(z)$ 有下列性质：

(a) $B(z)$ 在单位闭圆 $|z|\le 1$ 上解析.

(b) 在 $|z|=1$ 上，$|B(z)|=1$.

(c) $B(z)$ 在 $|z|<1$ 内有有限多个零点.

反之，这些性质（不计模为1的常数因子）唯一地确定 $B(z)$，亦即：若解析函数 $f(z)$ 有上述性质(a),(b),(c)，则 $f(z)/B(z)$ 等于某个模为1的常数.

四、证明题（10分/每小题）.

(1) 设 D 为以简单分段光滑闭曲线 L 为边界的闭区域，D 上解析的函数 $f(z)$ 在 D 内 n 个不同点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 处的函数值分别为 $f(z_1), f(z_2), \cdots, f(z_n)$. 又设

$$\omega_n(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n).$$

试证：

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)}\cdot\frac{\omega_n(\zeta)-\omega_n(z)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

是一个次数不高于 $n-1$ 的多项式，且满足条件：

$$P(z_k)=f(z_k),\quad k=1,2,\cdots,n.$$

(2) 试证：若 $f(z)$ 为有界整函数，则 $f(z)$ 必定为常数. 举例说明：这个结果在实变函数情形

中不成立.

五、证明题（10分/每小题）

(1) 试证：若非零函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析，且 z_0 是它的一个零点，则存在 z_0 的一个邻域，在其中 z_0 是 $f(z)$ 的唯一零点。

(2) 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|f(z)|<1$. 试证：

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}\right| \le \left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|,\quad z\ne z_0,$$

以及

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2}.$$

并且，上述式子中等式在某点 z 处成立，当且仅当 $f(z)$ 有形式

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z},$$

这里，θ 为实数，$|z_0|<1$.