1999 年北京师范大学概率论与数理统计考研试题

(注. 每题 20 分, 写清题号)

一. 某单位 $N(N \geq 2)$ 人向灾区捐款, 已知有 $n(1 \leq n < N)$ 人每人捐 100 元, 另 $N-n$ 人每人捐 10 元 (捐款装入各自统一信封, 封面写有款额), 安排投入两只相同的募捐箱。并将两箱直接送往灾区, 让第一位灾民任取一箱, 且在其中任取一信封。

1. 试求: 第一位灾民所取信封装有 100 元的概率。

2. 要使第一位灾民所取 100 元的可能性最大, 问如何安排捐款次序? (指信封在二箱中的分配方式.)

二. 设 $U_1, U_2, \cdots, U_n, U_{n+1}$ 独立同分布服从 $(0,1)$ 上的均匀分布。

1. 证明: $X = -2\ln[\prod_{i=1}^{n} U_i] \sim \chi^2(2n)$。

2. 利用 $U_1, U_2, \cdots, U_n, U_{n+1}$ 产生一个服从 $t(2n)$ 的样本, 说明你这样产生的理由, 并用 C 或 Fortran 语言写出计算程序。

三. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自于具有密度函数 $f(x,\theta) =$

$\frac{1}{\theta}I_{\{0\le x\le\theta\}}$ 总体中的样本，其中 $\theta>0$ 为未知参数。

1. 求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_n$，并证明 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta\ (n\to\infty)$。

2. 求常数序列 $\{a_n\}$，使得 $a_n(\hat{\theta}_n-\theta)$ 依分布收敛，同时给出极限分布。

四. 随机向量 $X\sim N_n(0,I_n)$，a,b 为 R^n 中的单位向量。

1. 写出 $(a^\tau X, b^\tau X)$ 的联合分布（“τ”代表向量的转置），并证明：$a^\tau X$，$b^\tau X$ 独立 $\Longleftrightarrow$ $a^\tau b=0$。

2. 计算：$E(a^\tau X\cdot b^\tau X)^4=$?

五. 10 位评委对某歌星的演唱打出如下分数：

9.55，9.60，9.65，9.60，9.55，8.50，9.60，9.65，9.70，9.65

1. 计算其样本平均值，样本方差，样本中位数，经验分布函数，画出直方图。

2. 去掉一个最低分和一个最高分后，再完成 1 中的各项。

3. 设评委打分服从 $N(\mu,0.1^2)$，试在原样本下，对歌星的水平 $\mu=9.60$ 作出检验（取置信水平 $\alpha=0.05$）。评述你所得的检验结果和“去掉一个最低分，一个最高分后再取平均”这种评分制的统计原理。

（本题的计算结果均保留小数点后两位）。