

1. (20分) 设  $S_n$  为  $n$  次对称群, 证明
  - (1)  $S_n$  由  $n-1$  个对换  $(12), (23), \dots, (n-1, n)$  生成.
  - (2)  $S_n$  由  $(12)$  与  $(12 \dots n)$  生成.
2. (20分) 证明 任何 15 阶群必为循环群.
3. (20分) 若  $R$  为一个有单位元 1 的交换环且  $R$  的每个元素  $a$  满足条件  $a^2 = a$ , 则称  $R$  为一个布尔环.  
证明: 布尔环  $R$  满足下列性质:
  - (1)  $2a = 0$  对所有  $a \in R$
  - (2)  $R$  的每个有限生成理想都是

主理想.

- (3) 对  $R$  的每个素理想  $I$ ,  $R/I$  为特征 2 的素域.
4. (20分) 设在  $\mathbb{Z}[x]$  中, 理想  $I = (x^2 + x + 2, x^3 + x + 1)$ 
  - (1) 证明  $I$  为  $\mathbb{Z}[x]$  的极大理想.
  - (2) 求商环  $R = \mathbb{Z}[x]/I$  的元素个数.
5. (20分) 设  $K$  为有理数域  $\mathbb{Q}$  上多项式  $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$  的分裂域.
  - (1) 证明  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
  - (2) 求出  $K/\mathbb{Q}$  的所有中间域并给出证明.