

注：以下记 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维欧氏空间， m 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度。所有可测与可积均指 Lebesgue 可测与 Lebesgue 可积。

1. (20分) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为有界集， $m^*E > 0$ ，试证对满足 $0 < c < m^*E$ 的任一正数 c ，恒有 E 的子集 E_1 ，使得 $m^*E_1 = c$ 。其中 m^* 为 Lebesgue 外测度。

2. (15分) 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为直线上的非负可测函数列，且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = 0$ 。试证存在子列 $\{f_{k_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ，使得当 $i \rightarrow \infty$ 时， $f_{k_i} \rightarrow 0$ ， n 乎处处在 $\mathbb{R}$ 上成立。

3. (20分) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 且 $mE < \infty$, $f(x)$ 及 $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 是 E 上 m 几乎处处有限的可测函数. 对 $\varepsilon > 0$, 记 $E_k(\varepsilon) = \{x \in E: |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. 试证 $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ m 几乎处处收敛于 $f(x)$ 的充要条件是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m \left(\bigcup_{l=k}^{\infty} E_l(\varepsilon) \right) = 0.$$

4. (20分) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集且 $f(x)$ 在 E 上可积. 记 $E_k = \{x \in E: |f(x)| \geq k\}$. 试证

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot mE_k = 0.$$

5. (25分) 设 f 为 $[0, 1]$ 上的绝对连续函数, 且 $E \subset [0, 1]$ 是零测度集. 试证 $f(E)$ 也为零测度集.