

- 一. (20分) 已知正则曲面 $S: \vec{r} = \vec{r}^*(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, D 开. 又直线 l 上各点到 S 上各点间的距离在对应点 $P_1 \in l$ 与点 $P_2: \vec{r}^*(u_0, v_0)$ 上取到最小值. 试证: l 平行于 S 在点 P_2 处的切平面 T_{P_2} .
- 二. (23分) 给定单位球面 $S: |\vec{r}| = 1$ 及其单位法向 $\vec{n} = \vec{r}$. 已知 S 上弧长参数化曲线 $C: \vec{r} = \vec{r}(s) = -\vec{N}(s) \cos f(s) + \vec{B}(s) \sin f(s)$, 其中 $\vec{N}$ 和 $\vec{B}$ 分别为 C 的主法向和从法向, f 为光滑函数. 试证:
1. C 的曲率 $k = \frac{1}{\cos f}$, 挠率 $\tau = \frac{df}{ds}$, 测地曲率 $k_g = \tan f$;
 2. C 具有常测地曲率的充要条件为 C 是圆周.
- 三. (27分) 已知曲面 $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ 的两个基本形式分别为 $I = du^2 + dv^2$, $II = du^2 + b(u, v) dv^2$, b 为待定函数.
1. 确定 $b = b(u, v)$ 使 $S \subset \mathbb{R}^3$ 存在;
 2. 试证当上述 S 存在时, S 必为单位圆柱面.
- 四. (16分) 设曲面 S_1 等距对应于单位球面局部. 又设直线段 l 落在曲面 S_2 之上. 试证: S_1 与 S_2 之间不存在等距对应.
- 五. (14分) 设曲面 S 上以 P_0 为原点的测地极坐标系 (ρ, φ) 在测地圆盘 $P \leq P_0$ ($P_0 = \cos \alpha > 0$) 内存在. 记 $L(r) = \{ \vec{r}(\rho, \varphi) \in S \mid \rho = r \}$ 周长, 其中 $r \in (0, P_0)$. 试证: S 在点 P_0 处的 Gauss 曲率
- $$K(P_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L(r)}{r^3}.$$