

1. 设 $C_1, C_2, \dots, C_m$ 是 R^n 中 m (≥ 1) 个凸子集. 试判断下面命题是否成立, 若成立, 证明之, 否则举出 $n=2, m=2$ 时的反例说明. (10分)

(1) $\bigcap_{i=1}^m C_i$ 是凸集.

(2) $\bigcup_{i=1}^m C_i$ 是凸集.

2. 假设 A 是 $n \times n$ 阶非奇异实矩阵, U, V 是 $n \times m$ 实矩阵, 若 $I + V^T A^{-1} U$ 可逆, 则证明: $A + UV^T$ 可逆, 且 (18分)

$$(A + UV^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} U (I + V^T A^{-1} U)^{-1} V^T A^{-1}$$

3. 假设 $S \subset R^n$ 是非空凸集, $f(x)$ 是在 S 上具有二次连续可微的凸函数, 并且存在常数 $m > 0$, 使得 (18分)

$$u^T \nabla^2 f(x) u \geq m \|u\|^2, \quad \forall x \in L(x_0), u \in R^n$$

试证明: 水平集 $L(x_0) = \{x \in S \mid f(x) \leq f(x_0)\}$ 是有界闭凸集.

4. 假设线性规划:

(18分)

$$(LP) \quad \begin{aligned} \min \quad & C^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

的可行域非空, 其中, $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $C, x \in R^n$, $b \geq 0$.

证明, 此线性规划的最优值, 或者无下界, 或者至少在 D 的一个顶点上达到.

5. 假设 $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $C \in R^n$, $\alpha \in R$, 并且集合

$\{x \in R^n \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ 是非空的, 利用线性规划对偶定理

证明: $\{x \in R^n \mid Ax \geq b, x \geq 0\} \subset \{x \in R^n \mid C^T x \geq \alpha\}$ 的充分

必要条件是存在 $y \in R^m$, 满足:

(18分)

$$y^T A \leq C^T, \quad y \geq 0, \quad y^T b \geq \alpha.$$

6. 用最速下降法求无约束最优化问题

(18分)

$$\min_{x \in R^n} f(x)$$

的最优解时, 若已得最优解的近似解 x^k , 且在 x^k 处的梯度

$$\nabla f(x^k) = \left(\frac{\partial f(x^k)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_n} \right)^T \neq 0$$

证明, 下一步迭代得到的是 x^{k+1} 必满足:

$$\nabla f(x^{k+1})^T \nabla f(x^k) = 0.$$