

北京师范大学  
2001 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业：科学技术哲学  
研究方向：本专业各方向

科目代码：921  
考试科目：高等数学

一、判断下列命题的正误，并简述其理由（每题 3 分，共 30 分）：

1. 有极限的数列必是单调有界数列。
2. 无穷大量与有界变量的乘积仍是无穷大量。
3. 如果  $f(x)$  在  $(-a, a)$  内是可导奇（偶）函数，则其导函数  $f'(x)$  必是  $(-a, a)$  内的偶（奇）函数。
4. 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导是  $f(x)$  在  $x_0$  处连续的充分必要条件。
5. 函数  $f(x)$  的极值点一定不是曲线  $y=f(x)$  的拐点；曲线的拐点也一定不是函数的极值点。
6. 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界，则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积。

7. 由于广义积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$  是  $(-\infty, +\infty)$  上奇函数的积分，所以积分值等于 0。

8. 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续，则在  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi$ ，使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

9. 交错级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$  不满足莱布尼兹定理的条件，所以不收敛。

10. 二元函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处取得极值的充分必要条件是  $f(x_0, y)$  及  $f(x, y_0)$  在  $(x_0, y_0)$  处取得极值。

二、计算下列各题（每题 5 分，共 30 分）

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}}$  ( $n$  为正整数,  $a > 0$ )

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

3.  $y = e^{x^2} f(x^{e^2})$ , 求  $y'$

4.  $\int x \ln(1+x^2) dx$

5.  $\int_b^a \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$

6. 求  $u = x + \sin \frac{y}{2} + e^{yz}$  的全微分。

三、设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导 ( $a > 0, b > 0$ ), 求证方程:

$$\ln \frac{b}{a} f'(x) - [f(b) - f(a)] \frac{1}{x} = 0$$

在  $(a, b)$  内至少有一个根。(10分)

四、计算二重积分  $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$

其中  $D$  为曲线  $y = \sqrt{x}$  和直线  $y=x$  所围成的闭区域。(15分)

五、求为下列微分方程的通解:(15分)

$$2xydx - (x^2 + y^2)dy = 0$$