

北京师范大学

2002 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业:

科目代码: 34

研究方向:

考试科目: 高等数学(物天无)

一. 求极限 (每小题 6 分, 共 12 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt}$

二. 求导数 (每小题 6 分, 共 18 分)

1. 设 $y = f(e^x)$. 求 y'' .

2. 设 $y = y(x)$ 由方程 $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\arctan \frac{y}{x}}$ 所确定. 求 dy .

3. 设 $z = \frac{1}{x} f(xy) + xf(x+y)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

三. 求积分 (每小题 6 分, 共 24 分)

1. 求 $\int e^{\sin x} \sin x \cos x dx$.

2. 求 $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$, 其中 D 是由 $x^2 + y^2 \leq 1$ 及 $y \geq |x|$ 所围成的平面图形.

3. 求 $z = x^2 + y^2$ 及 $y + z = 2$ 所围立体的体积.

4. 求 $\int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$, 其中 L 为 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

四. (8 分) 求微分方程 $y'' + 2y' + y = xe^x$ 满足 $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0$ 的解.

五. (8 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$ 的收敛区间及和函数.

六. (10 分) 将 $f(x) = e^x (-\pi \leq x \leq \pi)$ 展开成傅立叶级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ 的和.

七. (10分) 证明函数 $z = 4 - ye^{\cos x} - y^2$ 有无穷多个极大值但无极小值.

八. (10分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, f(c) < 0 (a < c < b)$. 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) > 0$.