北京师范大学
2002年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业：所有专业　　　　科目代码：449

研究方向：　　　　考试科目：量子力学

1. （20分）

$t=0$时，描写氢原子中的电子的波函数为

$$\Psi=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}R_{31}Y_{11}\\ \frac{2}{3}R_{21}(Y_{11}+Y_{10})\end{bmatrix},$$

其中R_{nl}为径向波函数，Y_{lm}为球谐函数. 求

(a) 该电子的能量E，角动量平方$\hat{L}^2$，角动量z分量L_z和自旋z分量s_z的可能值及相应几率；

(b) 上述各量的平均值；

(c) 该电子出现在r—$r+dr$的概率；

(d) t时刻的波函数$\Psi(r,\theta,\phi,t)$.

2. （20分）

一维情况下，宇称算符P的定义为

$$P\Psi(x)=\Psi(-x).$$

试证明：

(a) P是厄米算符；

(b) P的本征值为$+1$和-1；

(c) P的分别属于$+1$和-1的本征函数Ψ_+和Ψ_-正交；

(d) P还是幺正算符.

3. （20 分）

中心力场中，粒子的哈密顿量算符为

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2\mu}+V(r)=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2}+V(r).$$

(a) 证明$[\hat{\mathbf{L}},\hat{H}]=0$，即角动量$\mathbf{L}$是守恒的.

(b) 列举出几种该量子体系力学量完全集的选取方案.

(c) 如果对该体系外加一沿z方向的均匀恒定磁场，那么体系的$\hat{H}$如何改写？此时体系的守恒量有哪些？

4. （20 分）

一束自旋为$\frac{1}{2}$的粒子进入斯特恩-盖拉赫装置 SG (I)后被分成两束. 去掉其中$s_z=\frac{1}{2}\hbar$的一束. 另一束（$s_z=-\frac{1}{2}\hbar$）进入第二个斯特恩-盖拉赫装置 SG (II). SG (II)与 SG (I)的交角为α. 则粒子束穿过 SG (II)后又被分成两束. 求这两束的相对数目之比.

5. （20 分）

设简谐振子的$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}'$，其中$\hat{H}_0=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}k_0x^2$，而$\hat{H}'=\frac{1}{2}k_1x^2$可以看成微扰. 用微扰论计算基态能量本征值，并与精确解比较.

参考公式：$x\phi_n(x)=\sqrt{\frac{n}{2}}\phi_{n-1}+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\phi_{n+1}$,

$$x^2\phi_n=\sqrt{\frac{n}{2}}x\phi_{n-1}+\sqrt{\frac{n+1}{2}}x\phi_{n+1}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{n(n-1)}\phi_{n-2}+(n+\frac{1}{2})\phi_n+\frac{1}{2}\sqrt{(n+1)(n+2)}\phi_{n+2}.$$

能量一级修正公式：$E^{(1)}=H'_{kk}=(\Psi_k^{(0)},H'\Psi_k^{(0)})$,

能量二级修正公式：$E^{(2)}=\sum_n{}'\frac{|H'_{nk}|^2}{E_k^{(0)}-E_n^{(0)}}$.