

北京师范大学

2003 年招收硕士学位研究生入学考试题

专业：概率论与数理统计，系统分析与集成

科目代码：456

研究方向：随机分析，数理统计等

考试科目：概率论与数理统计

1. (30 分) 有 10 个相同的罐子，其中有 3 个罐子中各装有 1 个黑球和 1 个红球，有 6 个罐子各装有 2 个黑球和 2 个红球，有 1 个罐子装有 9 个红球和 1 个黑球。任意地取出一个罐子，再从该罐子中任意取出一球，结果发现取出的是红球，试问
- 此球是从装有 10 个球的罐子中取出的概率是多少？
 - 此球最有可能是从装有几个球的罐子中取出？

2. (30) 考虑函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{3}e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

- 试证明 $F(x)$ 为分布函数；
 - 试问 $F(x)$ 是否可以表示为连续型分布函数和离散型分布函数的线性组合？说明理由。
3. (30) 某工厂生产的一批产品共有 N 件，其中有 M 件次品。从这批产品中任意不放回抽取 n 件产品，用 ξ 表示抽出残品中的次品件数，试求 ξ 的数学期望和方差。
4. (30 分) 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 为来自于两点分布总体 ξ 的简单样本，而 ξ 的密度矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ ，其中 $0 < p < 1$ 。
- 参数 p 的矩估计量是否为无偏估计量，为什么？
 - 试由似然函数导出参数 p 的极大似然估计量，该估计量是否为无偏估计量？
5. (30) 设 x_1, \dots, x_n 为来自于 $N(a, \sigma^2)$ 的简单样本， y_1, \dots, y_m 为来自于 $N(a, 4\sigma^2)$ 的简单样本，其样本均值分别记为 \bar{x} 和 \bar{y} 。
- 常数 c 和 d 应该满足什么条件才能够使得 $\hat{a} = c\bar{x} + d\bar{y}$ 为参数 a 的无偏估计？
 - 确定常数 c 和 d ，使得估计量 \hat{a} 的方差达到最小。
 - 试推导出检验

$$H_0: a = 0 \leftrightarrow H_1: a \neq 0$$

的显著水平 α 的拒绝域。