北京师范大学
2003 年招收攻读硕士学位研究生入学试题

专　　业：　　　　　　　　　　　　　　　　科目代码：310

研究方向：　　　　　　　　　　　　　　　　考试科目：高等数学（物天无）

说明：本试卷满分为 150 分；答题时写清题号，不必抄题.

一、求极限（本题共 24 分，平均每小题 8 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{x}\right)^{x^2}$, $(a\neq 0)$.

2. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续，求：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\displaystyle\int_0^{\sin x}\left[t\int_0^t f(u)du\right]dt}{(\sin x)^3}.$$

3. 设函数 f 在区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ (ε是一个正常数) 内具有连续的一阶导数，且 $f(0)=0$，求

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy}{t^3}.$$

二、导数及应用 (本题共 40 分，平均每小题10 分)

1. 设定义在全实轴上的实函数 f 和 g 都存在二阶连续导数，$y=f(e^x)e^{g(x)}$，求 y''.

2. 设 $u=f(x,y)$, 其中 y 是由方程 $g(x,y)=0$ 所确定的 x 的函数 (f 及 g 均有连续的二阶连续偏导数). 求 $\dfrac{d^2u}{dx^2}$.

3. 记过曲面 $S: z=2x^2+y^2$ 上一点 $(1,1,3)$ 的切平面为 π_1. 设平面 π_2 同时满足如下条件： (1) π_2 与 π_1 平行，(2) π_2 与 π_1 之间的距离为 $\sqrt{21}$，(3) π_2 与曲面 S 不交. 试求：平面 π_2 的方程.

4. 证明：双曲线 $xy=a(a>0)$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形面积为常数.

三、求积分 (本题共 24 分，平均每小题 8 分)

1. $\displaystyle\int e^{\sin^2 x}\sin^2 x\sin(2x)\,dx$.

2. 求圆柱体 $x^2+y^2\le Rx\,(R>0)$ 含在球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 中的部分体积.

3. 计算第二型曲线积分 $\displaystyle\int_L e^x(1-\cos y)\,dx-e^x(1-\sin y)\,dy$, 其中 L 是从点 $A(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 再到 $C(0,1)$ 的折线.

四、求微分方程的解 (本题共 20 分，平均每小题 10 分)

1. 求 $y''-4y'+4y=e^{2x}$ 满足 $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=1$ 的特解.

2. 求 $y''-\dfrac{y'}{x}-xe^{x}=0$ 的通解.

五、级数 (本题共 20 分，平均每小题 10 分)

1. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n4^{n}}$ 的收敛区间和和函数.

2. 设 f 是 $2\pi-$ 周期的函数且在区间 $[-\pi,\pi)$ 上有解析式:

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\le x<0,\\ x+1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

求 f 的富里埃 (Fourier) 级数并讨论其收敛性.

六、线性代数 (本题共 22 分，平均每小题 11 分)

1. 求线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2+8x_3+4x_4=1\\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4=1\\ x_3+2x_4=2\\ 2x_3+3x_4=1\end{cases}$$

的解.

2. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，向量 β 不是方程组 $AX=0$ 的解，即 $A\beta\neq 0$. 试证明：向量组 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 线性无关.