北京师范大学
2004 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业：　　　　　　　　　　　　科目代码：310
研究方向：　　　　　　　　　　考试科目：高等数学（物天无）

说明：本试卷满分为 150 分；答题时写清题号，不必抄题。

一、计算及应用题（本题共 120 分，平均每小题 8 分）

1. 求定积分和不定积分.

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$;　　　　(2) $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,dx$.

2. 设函数 $f(x,y)$ 有连续的二阶偏导数，记 $u=f(x,\frac{x}{y})\,(y\neq 0)$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3. 设曲线 $y=f(x)\,(f(0)=0)$ 在坐标原点有切线其切线方程为 $y=3x$. 试求：$\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{1}{n})$.

4. 试确定 a,b,c 使得 $y=ax^3+bx^2+c$ 与 $y=6x+1$ 在 $(1,7)$ 点相切且当 $x=-1$ 时，$y=ax^3+bx^2+c$ 取得极值.

5. 设函数 $f(x)=\arctan x$. 试求：$f^{(n)}(0)$, $n=1,2,3,\ldots$.

6. 记向量 $l_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $l_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$. 设函数 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点可微，且在点 P_0 沿 l_1,l_2 的方向导数分别为 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l_1}=2$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l_2}=3$. 求 f 在点 P_0 沿 $l=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的方向导数.

7. 设曲面 S 的方程为 $x^2+2y^2+3z^2=1$, 平面 π 的方程为 $x-y+z+4=0$. (I) 求 S 上与 π 平行的切平面方程；(II) 求 S 上距离平面 π 最近和最远的点.

8. 求　$y=\frac{1}{x}, y=x+\frac{3}{2}, y=x-\frac{3}{2}, y=-x$ 所围图形绕直线 $y=-x$ 旋转的旋转体体积.

9. 计算二重积分 $I=\iint_D (y-x)dxdy$. 其中 D 由直线 $y=x+1, y=x-3, y=-\frac{x}{2}+\frac{7}{9}, y=-\frac{x}{2}+5$ 所界.

10. 计算第二型曲线积分 $I=\int_L (e^x\sin y-my)\,dx+(e^x\cos y-y)\,dy$. 其中曲线 L 从点 $A(a,0)$ 开始沿曲线 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2\,(a>0)$ 经过点 $B(a-\frac{a}{\sqrt{2}},a-\frac{a}{\sqrt{2}})$ 到点 $C(0,a)$.

11. 求 $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ 满足 $y|_{x=-1}=2$ 的特解.

12. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}(x-2)^{2n-2}$ 的收敛区间和和函数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$.

13. 设 f 是 $2\pi-$ 周期的函数且 $f(x)=x,\forall x\in[-\pi,\pi)$. (I) 求 f 的富里埃(Fourier) 级数并讨论其收敛性； (II) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$ 的和.

14. 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$$

的逆矩阵 A^{-1}.

15. 设线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

试问：何时有解？何时有唯一解？何时有无穷多组解？试求对应这三种情况的 λ 分别所取的值.

二、证明题 (本题共 30 分，平均每小题 10 分)

16. 设定义在 $(0,\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f(xy)=yf(x)+xf(y),x,y\in(0,\infty)$.

(1) 证明函数 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上处处可导且 $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}+f'(1)$;

(2) 求 $f(x)$ 的一般解析式。

17. (1) 证明不等式： $\dfrac{2x}{\pi}<\sin x,\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

(2) 设 f 在 $[0,\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. 证明： $\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx=0$.

18. 设非齐次线性方程组 $AX=b$ 有一个解向量 β, 并且它的齐次线性方程组 $AX=0$ 有一个基础解析 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$. 试证明：向量组 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ 线性无关且方程组 $AX=b$ 的任一解 γ 均可由 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ 线性表示，即 $\gamma=c_0\beta+c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_k\alpha_k$, 其中 $c_0+c_1+c_2+\cdots+c_k=1$.