北京师范大学

2004 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业：　　　　　　　　　　　　科目代码：310

研究方向：　　　　　　　　　　考试科目：高等数学（物天无）

说明：本试卷满分为 150 分；答题时写清题号，不必抄题。

一、计算及应用题（本题共 120 分，平均每小题 8 分）

1. 求定积分和不定积分.

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$;　　　　(2) $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,dx$.

2. 设函数 $f(x,y)$ 有连续的二阶偏导数，记 $u=f(x,\dfrac{x}{y})\ (y\neq 0)$. 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3. 设曲线 $y=f(x)\ (f(0)=0)$ 在坐标原点有切线其切线方程为 $y=3x$. 试求：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nf(\frac{1}{n})$.

4. 试确定 a,b,c 使得 $y=ax^3+bx^2+c$ 与 $y=6x+1$ 在 $(1,7)$ 点相切且当 $x=-1$ 时，$y=ax^3+bx^2+c$ 取得极值.

5. 设函数 $f(x)=\arctan x$. 试求：$f^{(n)}(0),\ n=1,2,3,\ldots$.

6. 记向量 $l_1=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}),\ l_2=(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$. 设函数 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点可微，且在点 P_0 沿 l_1,l_2 的方向导数分别为 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l_1}=2,\ \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l_2}=3$. 求 f 在点 P_0 沿 $l=(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ 的方向导数.

7. 设曲面 S 的方程为 $x^2+2y^2+3z^2=1$，平面 π 的方程为 $x-y+z+4=0$. (I) 求 S 上与 π 平行的切平面方程；(II) 求 S 上距离平面 π 最近和最远的点.

8. 求 $y=\dfrac{1}{x},y=x+\dfrac{3}{2},y=x-\dfrac{3}{2},y=-x$ 所围图形绕直线 $y=-x$ 旋转的旋转体体积.

9. 计算二重积分 $I=\displaystyle\iint_D (y-x)\,dxdy$. 其中 D 由直线 $y=x+1,y=x-3,y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{7}{9},y=-\dfrac{x}{2}+5$ 所界.

10. 计算第二型曲线积分 $I=\displaystyle\int_L (e^x\sin y-my)\,dx+(e^x\cos y-y)\,dy$. 其中曲线 L 从点 $A(a,0)$ 开始沿曲线 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2\ (a>0)$ 经过点 $B(a-\dfrac{a}{\sqrt{2}},a-\dfrac{a}{\sqrt{2}})$ 到点 $C(0,a)$.

11. 求 $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ 满足 $y|_{x=-1} = 2$ 的特解.

12. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n}(x-2)^{2n-2}$ 的收敛区间和和函数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n}$.

13. 设 f 是 $2\pi-$ 周期的函数且 $f(x) = x, \forall x \in [-\pi, \pi)$. (I) 求 f 的富里埃 (Fourier) 级数并讨论其收敛性； (II) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$ 的和.

14. 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵 A^{-1}.

15. 设线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

试问：何时有解？何时有唯一解？何时有无穷多组解？试求对应这三种情况的 λ 分别所取的值.

二、证明题 (本题共 30 分，平均每小题 10 分)

16. 设定义在 $(0, \infty)$ 上的函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，且 $f(xy) = yf(x) + xf(y), x, y \in (0, \infty)$.

(1) 证明函数 $f(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上处处可导且 $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x} + f'(1)$;

(2) 求 $f(x)$ 的一般解析式.

17. (1) 证明不等式： $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x, x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$.

(2) 设 f 在 $[0, \infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. 证明： $\lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = 0$.

18. 设非齐次线性方程组 $AX = b$ 有一个解向量 β, 并且它的齐次线性方程组 $AX = 0$ 有一个基础解析 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. 试证明：向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ 线性无关且方程组 $AX = b$ 的任一解 γ 均可由 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ 线性表示，即 $\gamma = c_0\beta + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k$, 其中 $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 1$.