北京师范大学

2004 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业：基础数学，应用数学，课程与教学论　　　科目代码：455

研究方向：数学各研究方向　　　考试科目：高等代数

1. (25 分）　试用 n 元初等对称多项式

$$\sigma_k = \Sigma_{i_1<\cdots<i_k} x_{i_1}\cdots x_{i_k},\quad k=1,2,\cdots,n$$

表述下列多项式：

(1) $n=2,\quad (x_1-x_2)^2$;

(2) $\Sigma x_1^2 x_2$, 此处 Σ 表示对脚标进行所有可能的 n 元置换后对不同的项求和;

(3) Σx_1^4.

2. (25 分）　设变换 $\sigma: R^2 \to R^2$ 定义为:

$$\sigma\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z\\ 2x-y+z\\ y-z\end{pmatrix}$$

(1) 证明 σ 是一个线性变换.

(2) 求出 σ 在下述基底下的矩阵:

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(3) 求出 σ 在下述基底下的矩阵:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

(4) 写出从 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 e_1,e_2,e_3 的过渡矩阵.

3. (25 分） 已知线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\qquad = a_1 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = a_2 \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad = b_1 \\ \qquad x_2 \qquad + x_4 = b_2 \end{cases}$$

(1) 求出系数矩阵的秩.

(2) 给出方程组有解的充分必要条件.

4. (20 分) 令实二次型 $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$, 其中 $A = A' = (a_{ij})_{n\times n}, X = (x_1 x_2 \cdots x_n)'$, 设 λ_1 与 λ_2 分别是 A 的最大与最小特征值. 则对任意的 n 个实数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 均有

$$\lambda_1(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (b_1 b_2 \cdots b_n)A(b_1 b_2 \cdots b_n)' \geq (\lambda_2 b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

5. (20 分） 令 V 是一个 n 维欧式空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$, 是 V 的一个标准正交基, σ 是 V 的一个线性变换, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是 σ 关于这个基的矩阵, 证明 $a_{ji} =< \sigma(\alpha_i), \alpha_j >, i, j = 1, 2, \cdots, n$.

6. (35 分） 设 σ 是 n 维向量空间 V 的一个线性变换, $p(x) = (x-\lambda)^r(x-\mu)^s$ 是 σ 的极小多项式, 此处 λ 和 μ 是不同的复数. 令

$$V_\lambda = ker(\sigma-\lambda)^r = \{\alpha \in V | (\sigma-\lambda)^r\alpha = 0\},$$
$$V_\mu = ker(\sigma-\mu)^s = \{\alpha \in V | (\sigma-\mu)^s\alpha = 0\}.$$

证明 (1)V_λ 和 V_μ 都是 σ 的不变子空间.

(2) $V = V_\lambda \oplus V_\mu$

(3) $\sigma|_{V_\lambda}$ 的极小多项式是 $(x-\lambda)^r$, $\sigma|_{V_\mu}$ 的极小多项式是 $(x-\mu)^s$.