

北京师范大学

2004 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业：物理各专业

科目代码：459

研究方向：各相关方向

考试科目：量子力学

本试卷共 6 道大题，满分为 150 分

1 (20 分) 一维谐振子势场 $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 中的粒子处于任意的非定态，试证明该粒子的位置概率分布经历一个周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ 之后复原。

2 (20 分) 简要解答以下问题：

- a) 写出外电磁场中的带电粒子的哈密顿 H 。并且回答：什么是 Landau 能级？
b) 写出中心力场中的粒子的所有守恒量。

c) \hat{P} 为动量算符， $|x\rangle$ 为坐标算符的基矢，下面的两个式子

$\hat{P}|x\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}|x\rangle$ 和 $\hat{P}\langle x| = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\langle x|$ ，哪个是正确的？请简述你的理由。

3 (20 分) 设系统的哈密顿量为 \hat{H} ，厄米算符 \hat{A} 与 \hat{H} 对易。试证明 $\frac{d\Delta A}{dt} = 0$ 。其

中 ΔA 是 A 的均方根偏差，即 $\Delta A = [\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle]^{1/2}$ ，式中尖括号表示取平均值。

4 (30 分) 考虑一维无限深势阱的问题，

- a) 写出单粒子的能级和波函数；
b) 讨论无限深势阱中 4 个自旋 1/2 的电子的基态能量和基态波函数；
c) 讨论无限深势阱中 4 个自旋 1/2 的电子的第一激发态的能量和波函数。

5 (30 分) 两个电子处在自旋单态

$$\chi(00) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)]$$

其中 α 、 β 分别是自旋算符 $S_z = \hbar/2$ 和 $S_z = -\hbar/2$ 的单粒子自旋态。

a) 试证明： $\chi(00)$ 是算符 $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ 的本征态 ($\vec{\sigma}_1$ 和 $\vec{\sigma}_2$ 分别是两个单电子的自旋算符)

科目代码 459

考试科目:量子力学

b) 如果测量一个电子的自旋 z 分量, 得 $S_z = \hbar/2$ 。那么, 测量另一个电子的自旋 $S_z = \hbar/2$ 的概率是多少? (写出你解答这个问题的理由)

c) 如果测量 $\chi(00)$ 态的一个电子的自旋 S_y , 测量结果表明它处在 $S_y = \hbar/2$ 的本征态, 那么再测量另一个电子自旋 x 分量, 得到 $S_x = -\hbar/2$ 的概率是多少? (写出你解答这个问题的理由)。

6 (30 分) 一个二维谐振子体系的哈密顿量是 $\hat{H}_0 = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$,

属于第二激发态 (能量为 $3\hbar\omega$) 的三个简并态可以在粒子数表象写为 $|n_x n_y\rangle$ 形式,

它们分别是: $|20\rangle, |11\rangle$ 和 $|02\rangle$ 。

a) 加入微扰 $H' = \lambda x \hat{p}_y$ (λ 为小量)。在粒子数表象 (或称占有数表象) 中, 求 H' 在这个简并子空间的矩阵表示。一维谐振子的下降、上升算符分别是

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} \hat{P} \right), \quad a_+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{i}{m\omega} \hat{P} \right)$$

b) 在粒子数表象中, 求出该体系的第二激发态能量加入微扰后的一级修正值, 并且求出简并态微扰论的零级波函数。