

北京师范大学
2005 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业: 物理类各专业

科目代码: 459

研究方向: 各方向

考试科目: 量子力学

【注意】答案写在答题纸上, 写在试题上无效。

1. (20 分) 一个电子被限制在一维谐振子势场中, 活动范围 $\sqrt{(x - \bar{x})^2} = 10^{-10} \text{m}$. 求激发电子到第一激发态所需的能量 (用 eV 表示) ($\hbar = 7 \times 10^{-22} \text{MeVs}$, $m_e = 0.5 \times \text{MeV}/c^2$, $c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$)

提示: 谐振子能量本征函数可以写成 $\psi_n, n = 0, 1, 2, \dots, \alpha = \sqrt{m_e \omega / \hbar}$

$$x\psi_n = \frac{1}{\alpha} [\sqrt{n/2}\psi_{n-1} + \sqrt{(n+1)/2}\psi_{n+1}]$$

$$x^2\psi_n = \frac{1}{2\alpha^2} [\sqrt{n(n-1)}\psi_{n-2} + (2n+1)\psi_n + \sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2}]$$

$$\frac{d}{dx}\psi_n = \alpha [\sqrt{n/2}\psi_{n-1} - \sqrt{(n+1)/2}\psi_{n+1}]$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi_n = \frac{\alpha^2}{2} [\sqrt{n(n-1)}\psi_{n-2} - (2n+1)\psi_n + \sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2}]$$

2. (30 分) 一个电子被限制在二维各向同性谐振子势场中 (特征频率为 ω).

(1) 写出其哈密顿量, 利用一维谐振子能级公式找到此电子的能级公式和简并度.

(2) 请推导电子的径向运动方程. 并讨论其在 $\rho \rightarrow \infty$ 时的渐近解.

提示: 极坐标下 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \varphi^2}$

3. 两个质量为 μ 的粒子, 被禁闭在特征频率为 ω 的一维谐振子势场中, 彼此无相互作用 (此题中波函数无须写出具体形式):

(1) 如果两个粒子无自旋可分辨, 写出系统的基态 (两个都在自己的基态) 和第一激发能级 (即一个在基态, 另一个在第一激发态) 的波函数和能量 (注意兼并情形). (10 分)

(2) 如果两个粒子是不可分辨的无自旋玻色子, 写出系统的基态和第一激发态的能量和波函数. 如果粒子间相互作用势为 $\lambda \delta(x_1 - x_2)$, 计算基态能级到一级微扰项. (15 分)

(3) 如果两个粒子是不可分辨的自旋 1/2 粒子, 写出基态能级和波函数 (考虑自旋). 如果粒子间相互作用能为: $-J \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$, 计算基态能量. (15 分)

(4) 同 (3), 解除势阱, 两个粒子一左一右飞出. 有两个探测器分别 (同时) 测量它们的 y 方向自旋角动量. 请问测量结果为两电子自旋反向的几率是多少? (10 分)

科目代码: 459

考试科目: 量子力学

4. (30 分) 中心力场中电子自旋与轨道角动量存在耦合能 $\xi(r)\vec{L} \cdot \vec{S}$, 总角动量 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Φ_{ljm_j} 是 $\vec{J}^2, \vec{L}^2, \vec{S}^2, J_z$ 的共同本征态. 现有一电子处于 $3p_{1/2}$ 态, 且 $m_j = 1/2$.

(1) 在一级近似下, $\xi(r)$ 可用常数 $\bar{\xi}$ 代替, 请问电子的能量与 $3p_{3/2}$ 态差多少?

(2) 请计算该电子产生的平均磁矩, 并由此计算在 z 方向均匀磁场 B 中电子的能量改变多少? (注: 磁矩 $\mu_z = -\frac{e}{2m_e c}(l_z + 2s_z)$)

$$\Phi_{ljm_j} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}}(\sqrt{l+m+1}Y_{lm}\alpha + \sqrt{l-m}Y_{lm+1}\beta), \text{ 当 } j = l + 1/2, m_j = m + 1/2$$

$$\Phi_{ljm_j} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}}(-\sqrt{l-m}Y_{lm}\alpha + \sqrt{l+m+1}Y_{lm+1}\beta), \text{ 当 } j = l - 1/2, m_j = m + 1/2$$

5. (20 分) 一个定域 (空间位置不动) 的电子 (自旋 $1/2$) 处于 z 方向强磁场 B_z 中. 自旋朝下 (z 轴负方向). 此时加上一个 y 方向交变弱磁场 $B_y \cos(\omega t)$. 其频率 ω 可调. 自旋朝上与朝下态的能量差可写成 $\hbar\omega_0$. 在 $\omega_0 \simeq \omega \gg 1$ 的条件下, 用微扰方法求出很短时间 τ 后粒子自旋朝上的几率