

北京师范大学
2007 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

院(系,所): 物理系

科目代码: 459

科目名称: 量子力学

(所有答案必须写在答题纸上, 做在试题纸或草稿纸上的一律无效)

注意: 试题末有参考公式若干。

1. (30 分)

(1) 已知氢原子处于本征态 $\psi_{211} = \beta r e^{-r/2a} Y_{11}(\theta, \varphi)$, 试确定归一化常数 β , 并计算在球壳 $(r, r + dr)$ 中找到电子的几率。

(2) 考虑自旋后, 单粒子波函数可表示为 $\psi(\vec{r}, s_z) = \begin{pmatrix} \psi(\vec{r}, \hbar/2) \\ \psi(\vec{r}, -\hbar/2) \end{pmatrix}$ 。若氢原子某时刻波

函数为 $\psi(\vec{r}, s_z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \psi_{211} \\ c(\psi_{211} + i\psi_{100}) \end{pmatrix}$, 其中 ψ_{nlm} 为 $\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z$ 的归一化共同本征函数。

确定使 $\psi(\vec{r}, s_z)$ 归一的常数 c 以及在该态下测量自旋 s_z 得到的平均值。

(3) 一质量为 m 的粒子沿 x 方向运动, 势能为 $V(x)$ 。设粒子 t 时刻的动量分布几率 $\varphi(p, t)$ 满足动量空间薛定谔方程

$$\left(\frac{p^2}{2m} - a \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \varphi(p, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(p, t), \text{ 其中 } a \text{ 为常数。求 } V(x)。$$

(4) 一质量为 m 的粒子沿 x 方向运动, 势能为 $V(x)$ 。证明在该态下如下关系成立:

$$\frac{d}{dt} \overline{\hat{x}^2} = \frac{1}{m} \overline{\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}}。 \text{ 其中 } \overline{\quad} \text{ 表示平均值。}$$

2. (30 分) 一维空间反射算符 \hat{B} 定义为 $\hat{B}\psi(x) = \psi(-x)$ 。

(1) 证明 $\langle p | \hat{B} | \psi \rangle = \varphi(-p)$, 其中 $\varphi(p) = \langle p | \psi \rangle$ 为态矢 ψ 在动量表象的表示。

科目代码: 459

科目名称: 量子力学

(2) 某一维系统 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$, 通过计算找出 $[\hat{B}, \hat{H}] = 0$ 时, $V(x)$ 所满足的关系。

3. (30 分) 一质量为 m 的粒子被束缚在位于 $x = 0$ 和 $x = a$ 的两墙中间做一维运动。边界处可等效于无穷大势垒。假设粒子处于基态时, 突然将 $x = a$ 处的墙移到 $x = 2a$ 。试计算:

(1) 墙移动后, 粒子处于新势阱基态的几率。

(2) 墙移动后, 粒子的能量平均值是多少?

4. (30 分) 两电子自旋记为 \vec{s}_1, \vec{s}_2 , $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$, 其分量记做 S_x, S_y, S_z 。若 α, β 表示 s_z 的单粒子本征态, 本征值分别为 $\frac{\hbar}{2}$ 和 $-\frac{\hbar}{2}$ 。试用

$\alpha(1)\alpha(2), \alpha(1)\beta(2), \beta(1)\alpha(2), \beta(1)\beta(2)$ 的线性组合表示 S_x 本征值为 $-\hbar$ 的本征态。

5. (30 分) 两个非全同且无自旋粒子。每个粒子的质量都是 m , 被束缚在 $0 \leq x \leq a$ 的无限深方势阱中。

(1) 写出系统能量最低的三个波函数和它们所对应的能量。

(2) 若加入一个 $V(x_1, x_2) = \lambda \delta(x_1 - x_2)$ 的相互作用势, 求以上三个态的能量一级修正及波函数的零级修正。

参考公式:

1. Pauli 矩阵 $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 。

2. $\int_0^\infty r^n e^{-br} = \frac{n!}{b^{n+1}}$ 。

3. $\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^\pi \sin^3 x dx = \frac{4}{3}$, $\int_0^\pi \sin^4 x dx = \frac{3\pi}{8}$,

$\int_0^\pi \sin^2 x \sin^2(2x) dx = \frac{\pi}{4}$ 。