1999 年中国人民大学数学分析 2 考研试题

一.（10分）设 $x>0$，求函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{\ln n}}$$

的收敛域.

二.（15分）用定义证明 $\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

三.（15分）设 $f(x)$ 是 2π 为周期的黎曼可积函数，

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad k=0,1,2,\cdots$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kx\,dx,\quad k=1,2,\cdots$$

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(c_k\cos kx+d_k\sin kx)$$ 是任意三角多项式，证明：

$$\int_0^{2\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx\le\int_0^{2\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx.$$

四.（20分）

(1) 设数列$\{y_n\}$单增趋于$+\infty$，且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=A \quad (\text{可以为无穷})$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=A$

(2) 设$x_1\in(0,\frac{\pi}{2})$，$x_{n+1}=\sin x_n$，$n=1,2,\cdots$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$，并利用(1)求极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\sin x_n$的值.

五.（20分）设$f(x)$在$(a,+\infty)$上二次可微，且

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

求证：(1) 存在$x_n\in(a,+\infty)$，使得

$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$，且$\lim\limits_{n\to+\infty}f'(x_n)=0$

(2) 存在$\xi\in(a,+\infty)$使得$f''(\xi)=0$.

六（20分）设L为有界单连通区域D的边界，且是逐段光滑曲线. $A(\xi,\eta)$为平面上一定点，$\vec{r}$为L上点(x,y)到A的向量，$r=r(x,y)$为$\vec{r}$的长度. 证明：

(1) A在L的内部时，$\oint_L\dfrac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds=0$

(2) A在L的外部时，$\oint_L\dfrac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds=2\pi$

其中$\vec{n}$为L上点(x,y)处的外法向量，$(\vec{r},\vec{n})$为向量$\vec{r}$与$\vec{n}$的夹角.