1999 年中国人民大学线性代数考研试题

一.（15分）解方程组.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ a x_1 + b x_2 + c x_3 = d \\ a^2 x_1 + b^2 x_2 + c^2 x_3 = d^2 \end{cases}$$

其中 a, b, c 为互不相同的常数.

二.（25分）设 A 是 $P^{n\times n}$ 中一个矩阵. 令

$$F(A) = \{ f(A) \mid f(x) \in P[x] \}$$

证明：(1) F(A) 是 $P^{n\times n}$ 的一个线性子空间；

(2) 可以找到非负整数 m, 使

$$E, A, A^2, \cdots, A^m$$

是 F(A) 的一组基.

(3) F(A) 的维数等于 A 的最小多项式的次数.

三. 设实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的正惯性指数为 p, 负惯性指数为 q. 则 n 维欧氏空间 R^n 可表成两两正交的子空间 V_1, V_2, V_3

的直和：

$$\mathbb{R}^n = V_1 \dotplus V_2 \dotplus V_3 .$$

其中 V_1, V_2, V_3 的维数分别是 p, q 及 $n-p-q$，且对 V_1 中非零向量 α 都有 $f(\alpha)>0$；对 V_2 中非零向量 α 都有 $f(\alpha)<0$；而对 V_3 中向量 α 都有 $f(\alpha)=0$．（20分）

四.（25分）证明：(1) 幂零矩阵的特征值都等于0；

(2) 幂等矩阵的特征值等于0或1；

(3) 幺幂矩阵的特征值都是单位根．

五.（15分）．设 A 是实对称矩阵，证明 A 是半正定 $\Longleftrightarrow$ 存在实对称矩阵 B，使得 $A=B^2$．