试题:

一、100 件产品中有 10 件是次品，第一次从 100 件中任取 20 件，第二次从已取出的 20 件中任取 8 件。求最后取出的 8 件中恰有 3 件次品的概率。(10 分)

二、设有一质点从直线上某点出发，每次以概率 p(0<p<1) 向右移一步，以概率 q=1-p 向左移一步(步长相等)。

1. 求在第 n 步时质点返回出发点的概率 $P_{0,0}^{n}$；　　(5 分)

2. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,0}^{n}$ 的收敛与发散性。　　(5 分)

三、在一次集会上，n 个人把他们的帽子放到房间的中央混合在一起，而后每人随机地取出一顶。求拿到自己的帽子的人数的均值与方差。　　(10 分)

四、证明:

1. 若随机事件序列 A_n 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$，则 $P\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right\} = 0, P\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} \overline{A_n}\right\} = 1$；　　(4分)

2. 若 A_n 是相互独立的随机事件序列，则 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ 成立的充分必要条件为

$P\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right\} = 1$ 或 $P\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} \overline{A_n}\right\} = 0$.　　(4 分)

3. 举例说明若去掉 A_n 是相互独立的随机事件序列的条件，则 2 中的结论不成立。　　(2 分)

五.

1. 试证:若 X, Y 相互独立，则 X, Y 不相关，举例说明逆命题不真.　　(10 分)

2. 设 Y 为 n 次独立随机试验中成功的次数. 假定每次成功的概率为 $p = \frac{1}{4}$. 如果 $P(Y \geq 1) \geq 0.70$, 求 n 的最小值. (10分)

3. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为密度函数为 $f(x) = 2x,\ 0 < x < 1$ 的独立随机变量. (10分)

(1) 求 $P(X_1/X_2 \leq \frac{1}{2})$.

(2) 求 $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ 的均值和方差.

4. 如果两个独立正态随机变量的方差为 σ_1^2 和 σ_2^2 (不相等), 求它们均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的 95% 置信区间. (10分)

5. 对正态分布 $N(\theta, 1)$, 检验 $H_0 : \theta = 0$ 对 $H_1 : \theta > 0$; 如果对 25 个观测的均值的拒绝区域为 $\bar{x} \geq \frac{3}{5}$, 求该检验的势函数. 画出势函数的草图. (10分)

6. 设 $X_1, \ldots, X_n$ 为 $N(0, \sigma^2)$ 的一个随机样本, 证明 $\sum_{i=1}^n X_i^2$ 为 σ^2 的一个充分统计量, 而且也是 σ^2 的最大似然估计. (10分)