2000年中国人民大学数学专业考研试题

试题:

1. 求极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$. （10分）

2. 证明：

(i) 存在 $c\in(0,1)$，使得 $c=e^{-c}$；（5分）

(ii) 任给 $x_1\in(0,1)$，定义 $x_{n+1}=e^{-x_n}$，则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=c$. （5分）

3. 设 f(x) 在 [a, b] (ab>0) 上连续，在 (a, b) 上可微。求证有 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b & a \\ f(b) & f(a)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$ （10分）

4. 证明函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值，而没有任何极小值。（10分）

5. 求积分 $\int_0^1 dy\int_1^y (e^{-x^2}+e^x\sin x)dx$. （10分）

6. 设 f(x) 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$，求证对任何 b>a>0，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-k]\ln\frac{b}{a}.$$ （10分）

7. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是发散的正项级数，则存在收敛于 0 的正数序列 $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ 使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_na_n$ 仍发散。（10分）

8. 计算曲线积分 $\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+4y^2}$，其中 C 为任意一条不通过原点的简单光滑正向封闭曲线。（10分）

9. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma 4zxdydz-2zydzdx+(1-z^2)dxdy$，其中 Σ 为 $z=e^y, 0\le y\le a$，绕 z 轴旋转所成的旋转面下侧。（10分）

10. 设映射 $f:\Re\to\Re$ 在有理数点上取值为无理数，在无理数点上取值为有理数。试证：f 不是连续函数。（10分）