清华大学硕士生入学考试试题专用纸

准考证号＿＿＿＿ 系　别＿＿＿＿ 考试日期 2001.1

专　业 基础数学/应用数学 考试科目 抽象代数

试题内容：

1. (15 分) 设 G 是实数集合 R 到它自身上的映射 $x \mapsto ax+b, a,b \in R, a \neq 0$ 所作成的集合。证明 G 关于映射的乘法作成一个群；G 中所有平移：$x \to x+t, t \in R$ 所组成的集合 T 是 G 的正规子群。描述商群 G/T 的构造。

2. (15 分) 设 G 是群，$a \in G$，a的阶 $o(a)=mn$，$(m,n)=1$。证明存在 $b,c \in G$ 使得 $a=bc=cb$，而且 $o(b)=m$，$o(c)=n$。

3. (15 分) 设 G 是有限群，$|G|=pq$，其中 p,q 是互异的素数。证明：

(1) G 一定含有正规的 Sylow 子群；
(2) 如果 G 是交换群，那么 G 一定是循环群。

4. (15 分) 设 R 是交换环，H 是 R 的一个非零理想，且 $H \neq R$，如果由 $ab \in H$ 可得 $a \in H$ 或 $b \in H$，则称 H 是 R 的一个素理想。证明 H 是 R 的素理想当且仅当 R/H 是一个整环。

5. (15 分) 证明高斯整数环 $Z[i]=\{a+bi \mid a,b \in Z\}$ 为欧几里得环。

6. (15 分) $f(x)=x^3-2 \in Q[x]$，将 $f(x)$ 在 Q 上的分裂域 Q_f 表示出来，并求扩张次数 $(Q_f:Q)=?$，其中 Q 表示有理数域。

7. (10 分) 设 G 是 $2n$ 阶群，且 n 是奇数，证明 G 有指数为 2 的正规子群。