清华大学硕士生入学考试试题专用纸

准考证号________ 系 别________ 考试日期 2001.1

专 业________ 考试科目 数学分析

试题内容:

一. (10分) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, 其中 $b\neq 0$,

用 $\varepsilon - N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

二. (20分) 作 $f(x)=|x+2|\, e^{-\frac{1}{x}}$ 图。

三. (15分) 计算 $\oint_L (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$, 其中 L 是曲面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与 $x^2+y^2=2x$ 的交线 $z\geq 0$ 的部分，曲线的方向规定为从原点进入第一挂限的方向。

四. (15分) 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{j=1}^{2n} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{2}{n^2}\left[\dfrac{2i+j}{n}\right]$, 这里 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数。

五. （20 分）设 R 中数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足

$$a_{n+1}=b_n-qa_n, \qquad n=1,2,\ldots,$$

其中 $0<q<1$，证明：

（1）若 $\{b_n\}$ 有界，则 $\{a_n\}$ 有界；

（2）若 $\{b_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 收敛。

六. （20 分）设 $X=\{f\in C^1(\Omega,R):\sup\limits_{x\in\Omega}[|f(x)|+\sum\limits_{i=1}^{2}|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)|]<+\infty\}$，

其中 Ω 是 R^2 中的开集。对 X 中的 f,g，定义

$$d(f,g)=\sup_{x\in\Omega}[|(f-g)(x)|+\sum_{i=1}^{2}|\frac{\partial(f-g)}{\partial x_i}(x)|]$$

证明 (X,d) 是完备距离空间。