

研  
北京大学1997年研究生入学考试试题

考试科目: 高等数学

考试时间: 97.1.25 下午

招生专业:

研究方向:

指导教师:

试 题:

1. 设  $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 3x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$  及  $\chi(t) = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$ .

试写出复合函数  $f(\chi(t))$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  的表达式, 并画出图形. (12分)

2. 求极限

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$ ; (4分)    b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + xe^x)}{(1 + xe^x) \ln(1 + \sqrt{1+x^2})}$ . (6分)

3. a.  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{3}{x}\right)^2 \left(\frac{x}{2}\right)^3$ , 求  $y', y''$ ; (4分)

b.  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ , 求  $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{zz}$  在  $x=1, y=-2, z=1$  处的值. (6分)

c. 利用微分概念, 计算  $\sqrt[3]{9}$  的近似值. (6分)

4. 试证: 曲面  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2$  上任意一点的切平面与三坐标轴的截距之和是一个常数. (10分)

5. 计算:

a.  $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$ ; (5分)

b.  $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ ; (5分)

c.  $\int \frac{dx}{\sin x \sin(x+1)}$ ; (5分)

d. 试叙述  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是积分的定义. (5分)

b. 计算

$$\iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz$$

其中区域  $D$  由曲面  $x^2 + y^2 = 2z$  及  $z = 2$  围成. (8分)

7. 解初值问题

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + y' - 2y = e^{2x}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1, \\ y''(0) = 1. \end{cases} \quad (10分)$$

8. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $[a, b]$  上绝对收敛, 一致收敛, 试问:

$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$  在  $[a, b]$  上一致收敛吗? (14分)

(作正面回答须证明, 作不确定回答要举例)

在职研究生如有困难, 可作下题 (分数一样).

设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

也在  $[a, b]$  上一致收敛.