

启用前机密

北京大学 1999 年研究生入学考试试题

考试科目: 高等数学

考试时间: 1月31日 上午

招生专业:

研究方向:

指导教师:

试 题:

一. 求下列函数的极限 (15分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{3x^2 - 5x + 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x)}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+7} - \sqrt{x^2-7})$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

二. (20分)

1. 设 $y \sin x - \cos(x-y) = 0$ 求 $\frac{dy}{dx}$ 2. 设 $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 3. 证明由方程 $(x - a \cos \alpha)^2 + (y - a \sin \alpha)^2 = \left(\frac{x-a}{m}\right)^2$ 确定的函数 z , 满足方程 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = m^2$, 其中 a, α, m 为常数4. 设 $x = u+v, y = u-v, z = u^2 \cdot v^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

三. 计算不定积分 (20分)

1. $\int x \sqrt{3-x} dx$

2. $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$

3. $\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} dx$

4. $\int (\tan x)^4 dx$

5. $\int (\ln x)^n dx$ (n 为自然数)

四. 求函数 $z = x + 2y$ 在 $x^2 + y^2 = 5$ 下的条件极值 (10分)

五. (15分)

1. 求曲面 $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $y = x$, $y^2 = x$ 围成的立体体积.

2. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所围成的立体柱面内部的体积.

六. (10分)

求函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} (x^2 + x + 1)^n$$

的收敛域.

七. (10分)

求方程 $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$

的通解.