

北京大学 2000 年研究生入学考试试题

考试科目：高等数学

考试时间：1月23日上午

招生专业：

研究方向：

指导教师：

试 题：

(10分) 一. 求下列各式的极限

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 \sin(x^2)} \quad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{ax}} \quad (a > 0, n > 0) \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +0} (x)^{\frac{1}{1 + \ln x}}$$

(15分) 二. 求下列函数的导数

$$1. y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad 2. y = \sin^n x \cos nx \quad 3. y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$$

$$4. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}}{x} \quad 5. \text{求 } y^{(n)}, y = e^x \cos x$$

(15分) 三. 求下列积分

$$1. \int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx \quad 2. \int \frac{\ln^3 x}{x^3} dx$$

$$3. \int \frac{1 + \sqrt{1+x}}{(x+x^2)(1+\sqrt{1+x})} dx \quad 4. \int \frac{dx}{x^2 + x - 2} \quad 5. \int x^3 e^{3x} dx$$

(10分) 四.

$$1. \text{设 } F(x, x+y, x+y+z) = 0 \text{ 求 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ 及 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$2. \text{设 } x = \cos \varphi \cos \psi, y = \cos \varphi \sin \psi, z = \sin \varphi \text{ 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

(10分) 五. 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上求出一组点, 使这组点到 n 个已知点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 距离的平方和为最小.

(10分) 六. 依据函数的特征点作函数 $y = \frac{4(x+1)}{x^2} - 2$ 的图形.

(10分) 七. 求由平面 $z = x - y, z = 0$ 和柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 所围成的体积 ($a > 0$).

(10分) 8. 列出有界闭区间上连续函数的三条重要性质, 并对应地各举一例, 说明这些性质对有界开区间上连续函数不一定成立。

(10分) 9. 求微分方程 $y'' + y' = \sin^2 x$ 的通解。