

北京大学2000年研究生入学考试试题

考试科目: 量子力学

考试时间:

4

2000.1.23下午

招生专业: 物理系各专业
方向

研究方向: 各研究

指导老师

试题:

一. (20分) 质量为 m 的粒子, 在位势

$$V(x) = \alpha\delta(x) + V'$$

$$V' = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a < 0 \\ V_0 > 0 \end{matrix}$$

中运动,

- b. 试给出存在束缚态的条件, 并给出其能量本征值和相应的本征函数;
- e. 给出粒子处于 $x > 0$ 区域中的几率. 它是大于 $1/2$, 还是小于 $1/2$, 为什么?

二. (10分) 若 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 是氢原子的定态矢 (电子和质子的相互作用为库仑作用, 并计及电子的自旋-轨道耦合项)

a. 给出 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 态的守恒量完全集;

d. 若 $\langle \beta | f(r) \hat{s} \cdot \hat{r} | \alpha \rangle \neq 0$, 则 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 态的那些量子数可能是不同的, 为什么?

(注: $f(r)$ 是 r 的非零函数, \hat{s}, \hat{r} 为电子的自旋和坐标算符。)

三. (16分) 三个自旋为 $1/2$ 的粒子, 它们的哈密顿量为

$$\hat{H} = C_0 (\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 + \hat{s}_2 \cdot \hat{s}_3 + \hat{s}_3 \cdot \hat{s}_1)$$

求本征值和简并度。

四. (22分) 两个自旋为 $1/2$ 的粒子, 在 (s_{1z}, s_{2z}) 表象中的表示为

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, 其中, $|\alpha_i|^2$ 是第 i 个粒子自旋向上的几率, $|\beta_i|^2$ 是第 i 个粒子自旋向下的几率。

a. 求哈密顿量

$$\hat{H} = V_0 (\sigma_{1x} \sigma_{2y} + \sigma_{1y} \sigma_{2x})$$

电子自旋算符

“本征态”

(r^2, L^2, J^2, J_z)

↑
↑
↑

的本征值和本征函数：（ V_0 为一常数）

f. $t=0$ 时，体系处于态 $\alpha_1 = \beta_2 = 1, \alpha_2 = \beta_1 = 0$ ，求 t 时刻发现体系在态 $\alpha_1 = \beta_2 = 0, \alpha_2 = \beta_1 = 1$ 的几率。 ψ_0

（注： σ_{ix}, σ_{iy} 为第 i 个粒子泡利算符的 x, y 分量）

五. (10分) 考虑一维谐振子，其哈密顿量

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)$$

而 $[a, a] = [a^+, a^+] = 0, [a, a^+] = 1$

a. 若 $|0\rangle$ 是归一化的基态矢 ($a|0\rangle = 0$)，则第 n 个激发态为

$$|n\rangle = N_n (a^+)^n |0\rangle$$

试求归一化因子 N_n ：

i. 若外加一微扰， $\hat{H}' = g a^+ a^+ a a$ ，试求第 n 个激发态的能量本征值（准至 g 一级）。

六. (22分) 考虑体系 $\hat{H} = T + V(x)$ ，

$$V(x) = \begin{cases} Ax & x > 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases} \quad A > 0.$$

b. 利用变分法，取试探波函数为

$$\Psi_1(x) = \left(\frac{2}{b\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

求基态能量上限：

a. 我们知道，如试探波函数为

$$\Psi_2(x) = \left(\frac{1}{b\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \frac{2x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

则基态能量上限为 $E_2 = \left(\frac{81}{4\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{A^2 \hbar^2}{m}\right)^{1/3}$ 。对这两个基态的能量上限，你能接受哪一个？为什么？

接受前者
因为前者小于后者
取前者即为基态能量上限