

起用前机密

北京大学 2001 年硕士研究生入学考试试题

考试科目: 高等数学

考试时间: 1 月 14 日上午

招生专业: 各专业

研究方向:

一. 求下列函数的极限 (12 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1+x)}$

4. $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

二. 求下列函数的导函数 (13 分)

1. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

2. $y = \sin[\cos^2(\lg^3 x)]$

3. $y = f\{f[f(x)]\}$, 其中 $f(x)$ 可导

4. $y(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

三. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{4}$ 与椭球面 $3x^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{17}{4}$ 交线上对应于 $x=1$ 处的切线方程与法平面方程 (10 分)

四. 计算 (10 分)

1. $\int \frac{dx}{\sin(x-a) \cos(x+b)}$

$(\cos(a+b) \neq 0)$

2. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$

五. 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dv$, 其中 Ω 为两个球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$ 的公共部分 (10 分)

六. (10 分)

1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^n x \right]^n$ 的收敛区间.

2. 将 $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 展成幂级数

七. 依据函数的特点作函数 $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的图形 (10分)

八. (15分)

1. 求通解: $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$

2. 求解初值问题:

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

九. (10分) 证明不等式

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \quad (0 < b < a)$$