启用前机密　　北京大学 2002 年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等数学　　　　考试时间：2002年1月27日下午2点、

招生专业：　　　　　　　　研究方向：

一、(12分) 求下列各式的极限：$5\times4=20$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$，其中 $a>0$；　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^2\ln^2(1+x)}$.

二、(12分) 求下列函数的指定阶导数，或在指定点的切线与法线方程：

(1) $y=f(\ln x)$，其中 $f(x)$ 二阶可导，求 y'，y''；

(2) $$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}-e, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$ 求 $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}+(1+x)^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})\ln\\ \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\end{cases}$

(3) 求由方程 $y\sin x+x\ln y=0$ 所确定的平面曲线在 $x=\pi$ 处的切线与法线方程；

(4) $$f(x)=\int_x^{x^2}e^{x^4-t^2}\,dt,$$ 求 $f'(x)$

三、(12分) 计算下列不定积分、定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$；　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^4 x}dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(e^{x^2}+\sin^3 x)\sin x\,dx$；　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\tan x\,d\tan x$

$=\tan x\cdot x\tan x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x(\tan x+x\sec^2 x)d$

$=x\tan^2 x\Big|-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\tan x\,d\tan x$

四.（8分）

(1) 作函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$ 的简图；

(2) 设 $a>0$，试讨论方程 $e^x=ax^2$ 有几个实根，并指出这些实根所处的区间或位置.

五.（8分）给定曲面

$$S:\quad z=1-x^2-y^2.$$

(1) 求 S 上任一点 (x,y,z) 处的法向量与切平面方程；

(2) 求第一卦限中曲面 S 的一个切平面，使它与第一卦限的三个坐标平面所围的四面体的体积最小.

六.（6分）作自变量替换 $s=2xy$，$t=x^2-y^2$ 求解方程

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

七.（8分）计算下列累次积分和第二型曲线积分：

(1) $I=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\sin y}{y}\,dy$；

(2) $I=\int_{\overset{\frown}{OA}} e^y\,dx+x(e^y+1)\,dy$

其中 $\overset{\frown}{OA}$ 为沿抛物线 $y=x^2$，从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$.

14 八.(8分) 计算下列三重积分:

$$I=\iiint_{\Omega}\frac{1+xyz}{x^2+y^2+z^2}dv$$

其中Ω为上半球面 $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$ 与旋转抛物面 $3z=x^2+y^2$ 所围之区域.

10 九.(6分) 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n+1)}$$

的收敛半径、收敛域以及和函数.

10 十.(6分) 求下列初值问题的解:

$$\begin{cases} y''+y=x+\cos x \\ y(0)=0,\ y'(0)=2. \end{cases}$$

14=7×2 十一、(8分) 设跳伞员及其装备的总质量为 m, 开伞后空气阻力与下落速度成正比, 比例(阻尼)係数为 $K>0$, 重力加速度为 g.

(1) 若开伞時跳伞员的下落速度为 v_0, 试求开伞后跳伞员下落速度的变化規律;

(2) 现设跳伞员在离开飞机后不开伞作特技表演. 设离开飞机時下落速度为 0, 不开伞時空气阻力仍与下落速度成正比, 阻尼係数为 K_0 ($0<K_0<K$). 若跳伞员能承受的最大落地速度为 $\frac{mg}{K}$, 试问允许进行特技表演的最长時间是多少? (可直接写成答案)

十二 (6分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 二阶可微 9-3

若 $f(a)=f(b)=0$, 且 $f''(x)<0$, $x\in(a,b)$

试证明: $f(x)>0$, $x\in(a,b)$

48