启用前机密　**北京大学2003年硕士研究生入学考试试题**

考试科目：高等数学　　　　　考试时间：2003年1月19日8：30

招生专业：理科各专业　　　　研究方向：

注意事项：答案必须答在答题纸上，答在试题上一律无效。

一、(25分) 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xe^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^2+x+1}\right]$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt}{\sin x\cdot\ln(1+x)}$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$.

二、(25分) 求下列函数的指定阶导数、偏导数：

(1) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$，求 y'；(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 求 $f'(x)$；

(3) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(4) 设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，其中 $f(u,v)$ 有二阶连续的偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

三、(21分) 计算下列不定积分、定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+e^x}$；　换元　　(2) $\displaystyle\int x\sin(\ln x)dx$；　分部

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

四、(24分) 计算下列重积分、累次积分和曲线积分：

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,d\sigma$，其中D为半圆域：$0\le y\le \sqrt{2x-x^2}$；

(2) $\int_1^3 dx\int_{x-1}^2 \sin(y^2)\,dy$；

(3) $\int_L e^x\sin y\,dx+(e^x\cos y+x)\,dy$，其中L为区域D：$0\le x\le \pi$，$0\le y\le \sin x$ 的正向边界.

五、(16分) 求解下列最值与最值问题：

(1) 求函数 $f(x,y)=xy$ 在区域D：$x^2+\frac{y^2}{4}\le 1$ 上的最大值和最小值；

(2) 求旋转抛物面 $S: z=x^2+y^2$ 与平面 $\pi: x+y-2z=2$ 之间的最短距离.

六、(11分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)2^n}$ 的收敛域与和函数.

七、(12分) 求下列积分方程的解 $f(x)$：

$$f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\,dt .$$

八、(10分) 设 $p>1$. 试证明当 $a>0$, $b>0$ 时成立

$$(a+b)^p\le 2^{p-1}(a^p+b^p)$$

其中等号当且仅当 $a=b$ 时成立.