考试科目：高等数学　　考试时间： 2004 年 1 月 11 日上午

招生专业：理科各专业　　研究方向：

注意事项：答案必须答在答题纸上。答在试题上一律无效。填空题和单选题不必抄题目，但必须标明大题号和小题号．填空题写明答案 (不要写计算过程), 单选题写明选项．

一、 填空题（每小题 6 分，共 54 分)

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(\cos x)^{\cot^2 x}=$ ________.

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{2x}(2x-t)\,e^{\frac{1}{t+1}}dt}{x^2}=$ ________.

3. $\ln(\cos x)$ 在点 $x=0$ 处展开至 x^4 项的局部泰勒公式为 ____________.

4. $\dfrac{\partial}{\partial x}(y\cdot x^{xy})=$ ________.

5. 设 $(x_0,\,y_0)$ $(x_0\neq 0)$ 是椭圆 $x^2+2y^2=1$ 上的点，那么函数 $f(x,\,y)=\dfrac{y}{x^2}$ 在 $(x_0,\,y_0)$ 点，沿椭圆在该点处外法向量的方向导数等于 ________.

6. 设 D 为圆域 $x^2+y^2\leq x$, 则 $\displaystyle\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=$ ________.

7. 累次积分 $\displaystyle\int_0^8 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^2\frac{1}{1+y^4}\,dy=$ ________.

8. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域为 ________, 和函数为 ________.

9. $(y^2-2x)\,dy-y\,dx=0$ 的通解是 ________.

二、 单选题 (每小题中，四个选项只能选一项。每小题 5 分，共 25 分)

1. 在曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ $(0<x<+\infty)$ 上的任一点 $P(x,\,y)$ 处作切线，该切线分别交 x 轴与 y 轴于 A 和 B（如图 1 所示），则

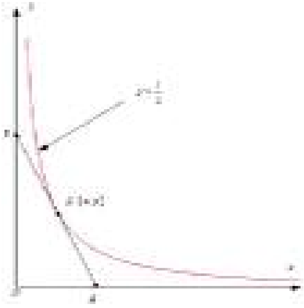

图 1

A. $PA < PB$

B. $PA = PB$

C. $PA > PB$

D. PA, PB 的大小关系与 P 的位置有关.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 则

A. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上并非点点连续;

B. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，但是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上并非点点可导;

C. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导，但是 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上并非点点连续;

D. $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

3. 若 $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad (x > 0)$, 则 $F(x)$

A. 不为常数;　　B. 为正常数;

C. 为负常数;　　D. 恒为零.

4. 当 $n \to \infty$ 时, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e$ 是 $\dfrac{1}{n}$ 的

A. 高阶无穷小;　　B. 低阶无穷小;

C. 等价无穷小;　　D. 同阶但非等价无穷小.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right) \qquad \left(0 < p \leq \frac{1}{2}\right)$

A. 条件收敛;　　B. 绝对收敛;

C. 发散;　　D. 其它情况.

三、(**13 分**) 讨论方程 $\ln x = ax$ 有几个实根.

四、(13 分) 求旋转抛物面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 与平面 $2x+2y+z+6=0$ 之间的最短距离.

五、(13 分) 设某公司所属甲、乙两工厂生产同一产品，当甲、乙两工厂的产量分别为 x 和 y 时，总成本为

$$C(x,\,y)=3x^2+xy+y^2+200000\,(\text{元})$$

现有总成本 530000 元，问如何分配甲、乙两工厂的产量，才能使甲、乙两工厂的产量之和为最大？

六、(13 分) 设 $p(t)$ 为某地区的人口数量函数，现时刻 $(t=0)$ 的人口数为 p_0, 根据生态条件知，该地区能容纳的最大人口数为 p_M. 假定人口数在任一时刻 t 的增长率与 $p_M-p(t)$ 成正比，比例常数为 k . 试求该地区的人口数量函数 $p(t)$.

七、(9 分) 求曲线积分 $I=\oint\limits_C \dfrac{xdy-ydx}{ax^2+by^2}$, 其中 C 是一条光滑的简单闭曲线，原点在其所围成的区域的内部，沿反时针方向，且 $a,\,b>0$.

八、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的一阶导数，且 $f(x)\ge 0,\quad f'(x)\le 0.$ 若 $F(x)\overset{\text{定义}}{=\!=\!=}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, 求证：对任意的 $x\in(0,\,1)$, 都有

$$x\,F(1)\le F(x)\le 2\int_0^1 F(t)\,dt.$$