北京大学 2005 年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等数学　　　考试时间：2005 年 1 月 23 日上午

招生专业：理科各专业　　　研究方向：

注意事项：答案必须答在答题纸上，答在试题上一律无效。填空题和单选题不必抄题目，但必须标明大题号和小题号。填空题写明答案（不要写计算过程），单选题写明选项。

一、填空题（每小题 8 分，共 56 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=$ $\underline{\ 1\ }$.　$\cancel{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ $\frac{1}{2}$

2. 累次积分 $\int_0^1 dx\int_x^1 x^2e^{-y^2}dy=$ $\underline{\frac{1}{6}-\frac{1}{3e}}$ V

3. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $\underline{\cancel{\frac{(x+z)z}{(x+z)y}}}$.　$\frac{z}{x+z}$　$\frac{z}{x+z}$

4. 曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为 $\underline{x+2y-4=0}$.

   $(1,2,0)$

5. 旋轮线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\ (0\le t\le 2\pi).$$

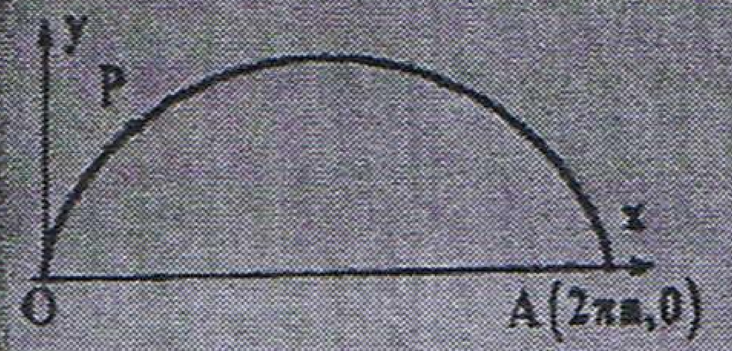

图 1

旋轮线的全长为 $\underline{\ 8a\ }$；设 P 和 A 为旋轮线上两个点，已知点 A 坐标为 $(2\pi a,0)$，点 P 分旋轮线为两段，弧 OP 与弧 PA 的长度比为 $1:3$（如图 1 所示），则 P 点的坐标为 $\underline{\left(\frac{2}{3}\pi a-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{3}{2}a\right)}$

6. 设 S 是 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 和 $z=0$ 所围成的半球区域的表面外侧，则曲面积分

$$\iint_S xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy=\underline{\frac{2}{5}\pi}.$$

7. $\underbrace{(\overset{P}{3x^2-y})dx+(\overset{Q}{3x^2+x})dy=0}$ 的通解是 $\underline{y=\frac{(-3x+C)x}{3x+1}}$.

$\frac{\partial P}{\partial y}=-1$　$\frac{\partial Q}{\partial x}$

$3x^2(dx+dy)$

$-ydx+xdy$

$d(3x+3y)+\cancel{d(\frac{x}{y})}$

$d(\frac{y}{x})=0.$

$3x+3y+\frac{y}{x}=c$

$3x^2+3xy+y=cx$

$y=\frac{cx-3x^2}{\ldots}$

$\left(3x^2-\frac{\cdot}{3x+1}(c-3x)\right)dx+(3x^2+1)dy$

$\left(3x+\frac{c+3x}{3x+1}\right)dx+$

$3xy+y=-3x^2+cx$

$y'+\frac{-1}{3x^2+x}y=-\frac{3x}{3x+1}$

$p(x)$

$\int p(x)dx=-\ln\frac{x}{3x+1}$

$\frac{3x+1}{x}y'+\frac{-1}{x^2}y=-3$

$\left[\frac{3x+1}{x}y\right]'=-3$

$y=\frac{(-3x+c)x}{3x+1}$

二、单选题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 如下函数中，在点 $x=0$ 处连续的是　C

(A) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$　　$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(B) $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$　　$(1+\frac{1}{x})^x$　e　　$(1-\frac{1}{x})^{-1\cdot(-1)}$　e

2. 下列二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微的是

(A) $f(x,y)=|xy|$;

(B) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$;

(C) $f(x,y)=\begin{cases}|xy|\ln|xy| & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$

$x\to 0$, $\frac{1-(\cos x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\frac{1-e^{\frac{1}{x}\ln\cos x}}{x}=-\frac{\frac{1}{x}\ln\cos x}{x}=\frac{-\sin x\, x^2}{\cos x\cdot 2x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}$

3. 当 $n\to\infty$ 时, $1-\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n$ 是 $\frac{1}{n}$ 的

(A) 同阶无穷小　　(B) 高阶无穷小　　(C) 低阶无穷小

4. 如下级数中，发散的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-(-1)^n}$　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$　　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$

$\frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{1}$　　$\frac{1}{n}>\frac{1}{n^2}$

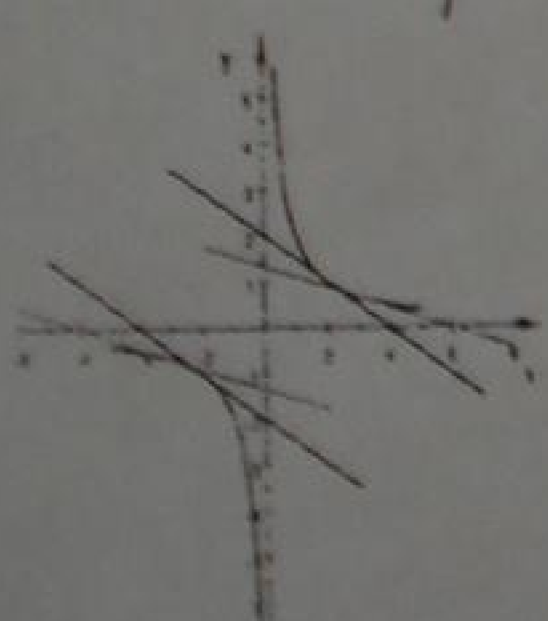

图 2

三、（12 分）在曲线 $y=\frac{2}{x}$ $(x\neq 0)$ 上，作互相平行的切线，如图 2 所示. 要使两平行切线之间的距离达到最大，求两个切点的坐标和两平行切线之间的最大距离.

$y=\frac{2}{x}$　　$\begin{cases}y=t\\ x=\frac{2}{t}\end{cases}$　　$(\frac{2}{t_1}, t_1)$　$(\frac{2}{t_2}, t_2)$

$\sqrt{(\frac{2}{t_1}-\frac{2}{t_2})^2+(t_1-t_2)^2}$

四、（13分）设 $Q(x,y)$ 在平面 xOy 的第一象限上具有连续的一阶偏导数，又对平面 xOy 的第一象限上的任一分段光滑曲线 L，曲线积分 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关，并且 $\forall t>0$ 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+Q(x,y)dy$$

$Q(t,1)-Q(t,0)$

$=Q(1,t)-Q(1,0)$

求 $Q(x,y)$.

五、（13分）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n+1)}$ 的收敛域与和函数.

六、（13分）一厂商欲投资某中药材生产．已知该药材的产量 Q(吨) 与土地面积 x(亩) 及种植工人数 y(个) 满足如下函数关系：$Q=x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}$．假定每亩土地的年租金为 8(万元)，每个工人的年薪为 2(万元)．若厂商投资额定为 24(万元)，试问租的土地亩数 x 与招聘的工人数 y 各为多少时年产量最大？

七、（15分）设 $p(t)$ 表示某一国家在时刻 t 的人口数，p_0 为某初始时刻（设为 $t=0$）的人口数．根据一种新的人口模型，$p(t)$ 满足如下微分方程的初值问题：

$$\begin{cases}\frac{dp(t)}{dt}=kp(t)\left(1-\frac{p(t)}{p_M}\right)\\ p(0)=p_0\end{cases}\qquad(*)$$

$y'=ky-\frac{k}{p_M}y^2$

$\frac{1}{y}y'=k-\frac{k}{p_M}y$

$\frac{d(\ln y)}{dy}+\frac{k}{p_M}y=k$

其中 k 与 p_M 为正常数，k 称为生命系数，它与当地的具体条件无关．p_M 为该国能承载的最大人口数，它取决于当地的自然生态与经济条件．$0<p_0<p_M$.

$y'+Ax=k$

1. 求初值问题 $(*)$ 的解.

$y=e^{-\int}$

2. 试问当该国的人口数为多少时，人口的增长速度最大？

3. 根据往年的资料，1979年底我国人口的增长速度最大，当时的人口数为9.7亿，试问根据上述人口模型，我国能承载的最大人口数 p_M 为多少亿？

$\frac{dY}{dX}=-A\frac{X}{d}dx$

$\left[\frac{k}{p_M}x-1\right]dx\quad\frac{dy}{dx}+\square x=0$

$dy=\square x\,dx$

$y=\square\frac{1}{2}x^2$

$\ln p=\frac{k}{2p_M}$