

# 00五) 北京大学 量子力学

(60')

约化普朗克常量  $\hbar = ?$

氢原子、三维谐振子的简并度分别为?

一维谐振子第一激发态的节点数为? 那三维谐振子第一激发态的呢  
已知  $\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ , 试求  $[\hat{L}_+, \hat{L}_-]$ ,  $[\hat{L}^2, \hat{L}_{\pm}]$ .

求  $[\hat{p}, \frac{1}{r}]$ ,  $[\hat{p}, r^2]$

分别在  $x, p$  表象中写出本征值为  $x_0$  的坐标波函数.

分别在  $x, p$  表象中写出本征值为  $p_0$  的动量波函数.

粒子处于势  $V(x) = m\omega^2 x^2/2$  中, 试在动量表象中写出其薛定谔方程

求  $\hat{L}_x, \hat{L}_y$  的共同本征态.

在泡利表象中求  $e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_x} \alpha$  ( $\alpha$  是  $S_z = \frac{\hbar}{2}$  的自旋本征态)

40')

在自然单位制下, 已知相互作用势为  $V(x) = \frac{1}{2}(x-a)^2$ , 能量本征值为  $\frac{13}{2}$ , 在此能量本征态, 试求  $x, \hat{p}, x^2, \hat{p}^2$  的平均值.

试证明 F-H 定理, 即  $\frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = \langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \rangle_n$ .

$\alpha, \beta$  是自旋向上、向下态, 有归一化本征函数  $\psi = c_1\alpha + c_2\beta$ , 试求算符  $\frac{5}{6}\hat{S}_y^2$  在  $\psi$  态中的平均值.

已知波函数  $\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi/b} \sin bx & (|x| \leq 2\pi/b) \\ 0 & (|x| > 2\pi/b) \end{cases}$ , 试求动量本征值在  $\psi$  态

相应的几率振幅

试在自然单位下求解  $\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}$  的平均值.

10')

薛定谔表象中, 坐标、动量算符用  $\hat{x}_S, \hat{p}_S$  表示, 试在海森堡表象中求解坐标、动量算符  $\hat{x}_H, \hat{p}_H$  的表达式, 要求用  $\hat{x}_S, \hat{p}_S$  表示.

22')

1) 体系处于  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  的第  $n$  个本征态  $\psi_n$  中, 有两个自旋  $S=0$  的全同粒子处于上述态中, 试求最低四个能量本征值、本征函数及其简并度.

2) 有两个自旋  $S=\frac{1}{2}$  的全同粒子, 处于  $V(x) = \begin{cases} m\omega^2 x^2/2 & x \geq 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$  的势场中, 试求最低四个能量本征值、本征函数及其简并度.

18')

1) 已知  $\hat{L}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , 试求  $\hat{L}_x$  的矩阵表示及其本征值、本征态.

2) 在  $\hat{L}_y$  的本征值为  $\hbar$  的本征态中测量  $\hat{L}_x$  的可能值及其相应的几率是多少?



## 2005年北大量子力学试题

一、简答题(60分)可直接写出结果。

1. 约化普朗克常量  $\hbar = ?$
  2. 氢原子的简并度  $= ?$  二维谐振子的简并度  $= ?$
  3. 一维谐振子的第一激发态的节点个数? 三维谐振子的第一激发态的节点个数?
  4.  $L_z = i\hbar(x\partial_y - y\partial_x)$ , 求  $[L_z, L^2]$ ,  $[L^2, L_z]$
  5. 求  $[p, \frac{1}{r}]$ ,  $[p, r^2]$
  6. 在  $x$  表象中写出本征值为  $a$  的坐标波函数和动量波函数
  7. 在  $p$  表象中写出本征值为  $b$  的坐标波函数和动量波函数
  8.  $x, y$  的共同本征态。
  9. 在泡利表象中求  $e^{i\frac{\pi}{2}S_y}\alpha$ ,  $\alpha$  是  $S_z = \frac{\hbar}{2}$  的本征态。
  10. 写出三维自由粒子的两组守恒量算符
- 二、解答题(40分)可直接写出结果。

1. 相互作用势  $V = \frac{1}{2}(x-a)^2$  能量本征值  $\frac{13}{2}$ ,  $m=1$ ,  $\hbar=1$ , 求  $x, p, x^2, p^2$  的平均值。
2.  $\alpha, \beta$  是自旋向上与向下态, 归一化本征函数  $\psi = c_1\alpha + c_2\beta$ , 求算符  $\frac{1}{6}S_x + \frac{5}{6}S_y$  在态  $|\psi\rangle$  中的平均值。
3.  $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin bx$  ( $|x| \leq \frac{\pi}{b}$ )  $|x| > \frac{\pi}{b}$   $\psi(x, 0) = 0$  求动量的本征值及其相应几率振幅。

4. 氢原子  $\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}$  的平均值, 和径向动能  $m=1, \hbar=1, n=1$

三、(10分) 在薛定谔图像中  $x, p$  求在海森堡表象中  $x_H, p_H$  (要求用  $x_S, p_S$  表示)。

7. (22分) (1) 体系处于  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  的  $\psi_0(x)$  中, 两个自旋  $S=0$  的全同粒子处于上述势中, 最低四个能量本征值, 本征函数, 简并度。

(2)  $V(x)$  在  $x \leq 0$  时是 0, 在  $x > 0$  处  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  两个自旋  $S=\frac{1}{2}$  的全同粒子, 求最低四个能量本征值, 本征函数, 简并度。

五 (18分) (1)  $L_z$  为  $L_x$  的矩阵表示, 并求其本征态, 本征值。

(2) 在  $L_y$  的本征值为  $\frac{\hbar}{2}$  的本征态中测量  $L_x$  的值和相应几率振幅是多少?