北京大学2007年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等数学　　考试时间：2007年1月21日上午

招生专业：理科各专业　　研究方向：

注意事项：答案必须答在答题纸上，答在试题上一律无效。填空题和单选题不必抄题目，但必须标明大题号和小题号，填空题写明答案（不要写计算过程），单选题写明选项。

11:12 – 11:56　　1:30 – 1:45 – 2:46

一、填空题（每小题8分，共64分）

1. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内连续，并满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sqrt{1+x^2})-1}{x\ln(1-x)}=2$，则 $f(1)=$ __1__，$f'(1)=$ __$\cancel{0}$ -4__

2. $f(x)=\int_0^1|x-t|\,dt$ 在 $[0,1]$ 上的最小值是 __$\frac{1}{4}$__；最大值是 __$\frac{1}{2}$__

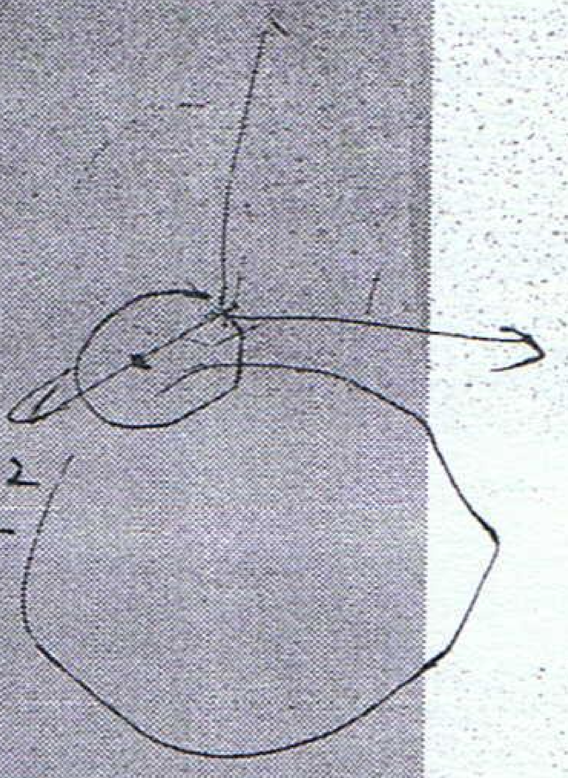
   $(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$

3. 曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程是 __$x+2y-4=0$__，法线方程是 __$\begin{cases}2x-y-3=0\\ z=0\end{cases}$__

   $(1,2,0)$　　$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}$

4. 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=ax\ (a>0)$ 所包围的区域的体积等于 __$\frac{2}{3}\pi a^3-\frac{8}{9}a^3$__

   $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$



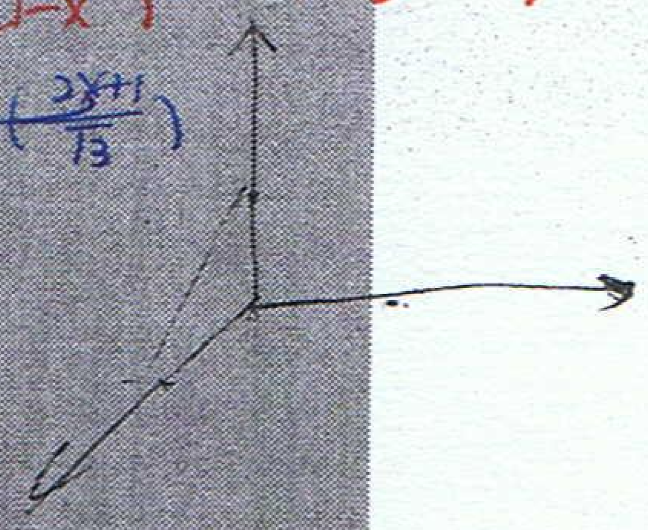
5. 椭圆 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x+y+z=1\end{cases}$ 的长轴等于 __$\cancel{\sqrt{2}}$ $2\sqrt{3}$__；短轴等于 __$\cancel{1}$ 2__

6. 幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{3n-3}}{3n-3}$ 的收敛区间是 __$[-1,1)$__；其和函数为 __$-\frac{1}{3}\ln(1-x^3)$__，$x\in[-1,1)$

   $-\frac{1}{3}\ln(1-x^3)$

7. 设连续函数 $f(x)$ 满足积分方程 $f(x)=e^x+\int_0^x f(t)\,dt$，则 $f(x)=$ __$(1+x)e^x$__

   $e^x(1+x)$　　$e^x(1+x)$　　xe^x



8. $y''+y'=0$ 的通解是 __$y=C_1e^{-x}+C_2$__，$y''+y'=\cos x$ 的通解是 __$C_1e^{-x}+C_2+(\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x)$__

二、单选题（每小题 6 分，共 24 分）

$g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$　$f(x) = x^2+1$　$g(x)=1$

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，且 $f(x) \neq 0$，函数 $y = g(x)$ 有间断点，则下列结论正确的是 C　~~B~~

(A) 函数 $y = f(g(x))$ 有间断点.　(B) 函数 $y = g(f(x))$ 有间断点.

(C) 函数 $y = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ 有间断点.　(D) 函数 $y = [g(x)]^2$ 有间断点.

2. 设 $f(u)$ 是连续可微函数，且 $\int_0^4 f(u)\,du = k \neq 0$，$L$ 为半圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$，起点为原点，终点为 $(2,0)$，则 $\int_L f(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy) =$ D

$x^2+y^2=2x$　$0 \leq x \leq 2$

$\frac{1}{2}\int_L f(x^2+y^2)\,d(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\int_0^4 f(u)\,du = \frac{1}{2}k$

(A) $-k$　(B) k　(C) $2k$　(D) $\frac{1}{2}k$

3. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - (x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1,$$

在 (0,0) 邻域　$f(x,y) > (x^2+y^2) \geq 0$　A

$\lim\limits_{\Delta x \Delta y \to (0,0)} \dfrac{f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$

则

(A) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(C) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(D) 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

4. 如下级数中，发散的是　B

$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$　$\frac{-1}{\sqrt{3}+1}$　$\frac{1}{\sqrt{4}-1}$　$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

$\frac{(-1)^n[\sqrt{n}+(-1)^n]}{[\sqrt{n}-(-1)^n][\sqrt{n}+(-1)^n]} = \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n-1}$

(A) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$　(B) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} + \dfrac{1}{n-1}$ 发散.

(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n} \sim \dfrac{(-1)^n}{n}$　$\frac{1}{\ln(n-1)} > \frac{1}{\ln n}$　(D) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ～ 收.

三、(16分) 给定曲线 $C_1:\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 - t^2 + 4 \end{cases}$ $(t \geq 0)$; $C_2: \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$,

又设直线 $x = k\,(k > 1)$ 与曲线 C_1, C_2 的交点分别为 A 和 B, 并且曲线 C_1 在点 A 处的切线与曲线 C_2 在点 B 处的切线互相垂直.

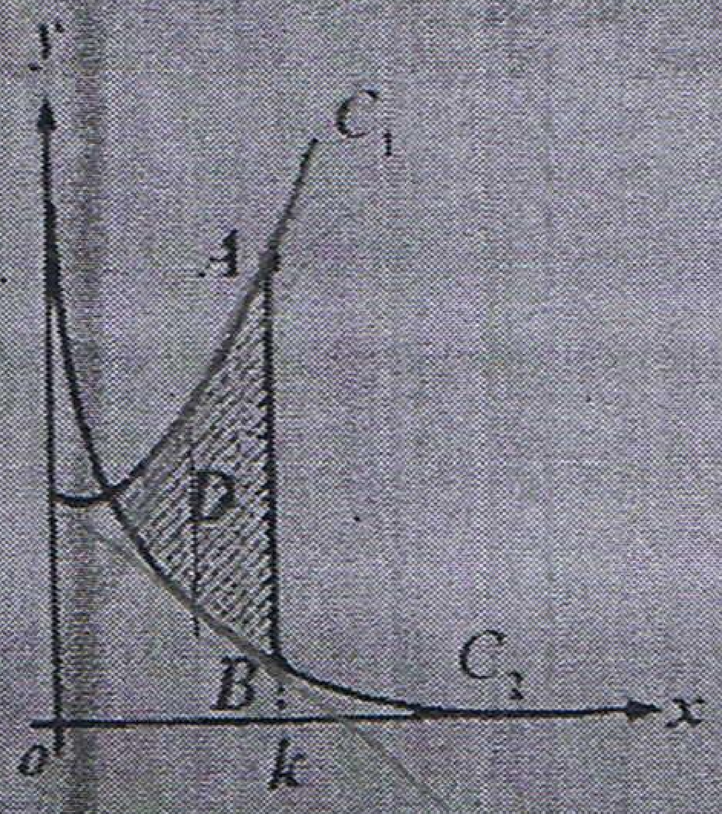


图 1

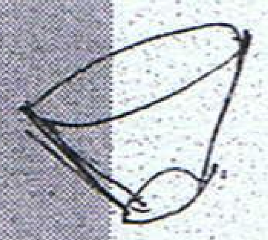
(1) 求 k 的值; 4

(2) 设由直线 $x = k$, 曲线 C_1 及曲线 C_2 所围成的封闭区域为 D (如图 1 阴影所示), 求 D 的面积. $-\frac{134}{5}$ $\frac{52}{5}$

$$\int_1^4 dx \int_{(3-\sqrt{x})^2}^{x^{\frac{3}{2}}-x+4} dy$$

$$= \int_1^4 \left(x^{\frac{3}{2}} - 2x + 6x^{\frac{1}{2}} - 5\right) dx$$

$$= \frac{52}{5}$$



四、(16分) 求曲面积分: $-\frac{15}{5}\pi$

(1) $\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, dS$; 0 0

(2) $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\, dS$,

其中 S 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq z \leq 2$, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是锥面 S 上的法向量的方向余弦, 并且 $\cos\gamma < 0$ (即法向量朝下, 如图 2 所示). $-\frac{15}{2}\pi$ ✓

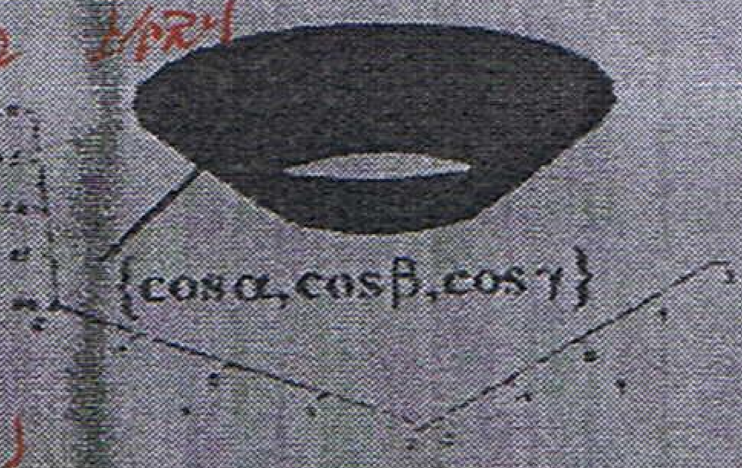


图 2

1). $\iint\limits_S (x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy)$

当 S_1: $x^2+y^2 \leq 1$ $z=1$ 下侧

S_2: $x^2+y^2 \leq 4$ $z=2$ 上侧

$\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$

$= \iint\limits_{S_1+S_2+S} (x\,dy\,dz + \cdots) - \iint\limits_{S_1} z\,dx\,dy - \iint\limits_{S_2} z\,dx\,dy$

$= \iiint\limits_\Omega 3\,dV + \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} dx\,dy - 2\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} dx\,dy$

$= 3\int_1^2 dz \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy + \pi - 8\pi$

$= 3\int_1^2 \pi z^2\,dz - 7\pi$

$= 3\pi\left(\frac{1}{3}z^3\right)\Big|_1^2 - 7\pi$

$= 7\pi - 7\pi = 0$

2) $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$

$= \iint\limits_{S+S_1+S_2} \cdots - \iint\limits_{S_1} z^2\,dx\,dy - \iint\limits_{S_2} z^2\,dx\,dy$

$= \iiint\limits_\Omega (2x+2y+2z)\,dV + \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} dx\,dy - 4\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} dx\,dy$

$= 2\iiint\limits_\Omega x\,dV + 2\iiint\limits_\Omega y\,dV + 2\iiint\limits_\Omega z\,dV + \pi - 16\pi$

$= 0 + 0 + 2\int_1^2 z \cdot \pi z^2 \cdot dz - 15\pi$

$= 2\pi \cdot \frac{1}{4}z^4\Big|_1^2 - 15\pi$

$= \frac{15}{2}\pi - 15\pi = -\frac{15}{2}\pi$

$\frac{\partial u}{\partial x} = u' \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = u' \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u'' \frac{x^2}{x^2+y^2} + u' \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u'' \frac{y^2}{x^2+y^2} + u' \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$

五、(16 分) 设 $u(t)$ 具有连续的二阶导数，且 $u = u(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + u = x^2 + y^2$$

求 $u(t)$.

$u'' + u' \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{u'}{\sqrt{x^2+y^2}} + u = x^2+y^2$

$u'' + u = t^2$

$\lambda^2+1=0 \quad \lambda = \pm i$

$u = C_1\cos t + C_2\sin t$

$+t^2-2$

$u = C_1\cos t + C_2\sin t + t^2 - 2$

六、(14 分) 求证不等式:

1. $\ln(x+1) < \dfrac{x(2x+1)}{(x+1)^2}$ $(0 < x < 1)$;

$f(x) = \ln(x+1) - \frac{x(2x+1)}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{x(x-1)}{(x+1)^3} < 0$

2. $\dfrac{\ln(x+1)}{x} + x\ln(1+\dfrac{1}{x}) \le 2\ln 2$ $(x > 0)$.

$g(x) = \ln(x+1) + x^2\ln(1+\frac{1}{x}) - 2\ln 2 \cdot x$

~~$g'(x) = 1 - 2x + 2x\ln(1+x) - 2x\ln x$~~

~~$g''(x) = -2 + 2\ln(1+x) + \frac{2x}{1+x} - 2\ln x - 2$~~

$= 2\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{2}{1+x} - 2$

$> 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{2}{1+x} - 2$

由于原式 $\frac{1}{x}$ 与 x 对称

故不妨设 $x > 1$

$g'(x) = \frac{1+x}{1+x} + 2x\ln(1+x) - 2x\ln x - 2\ln 2$

$g''(x) = 2\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{2}{1+x} - \frac{2}{(1+x)^2}$

不妨设 $x>1$ 则 $0<\frac{1}{x}<1$ 由 1

$< \frac{2\frac{1}{x}(\frac{2}{x}+1)}{(1+\frac{1}{x})^2} - \frac{2}{1+x} - \frac{2}{(1+x)^2}$

$= \frac{2(2+x) - (2+2x) - 2}{(x+1)^2} = 0$

$g'(x) < g'(1) = 0 \quad g(x) < g(1) = 0 \quad \therefore$ 得证.