1.3日上午.

考试科目：高等数学　　　　考试时间：2008年1月20日上午

招生专业：理科各专业　　　　研究方向：

注意事项：答案必须答在答题纸上，答在试题上一律无效。填空题和单选题不必抄题目，但必须标明大题号和小题号。填空题写明答案（不要写计算过程），单选题写明选项。

2009. 1.7 不考试题

一、填空题（每小题8分，共64分）

1. 若 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}+x^{4n}}$，则函数 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $\underline{\ 0\ }$ 点处间断；在 $\underline{\ 0\ }$ 点处不可导。 $0,\pm1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+x^{2n}+x^{4n})^{\frac{1}{n}}}{x}$$

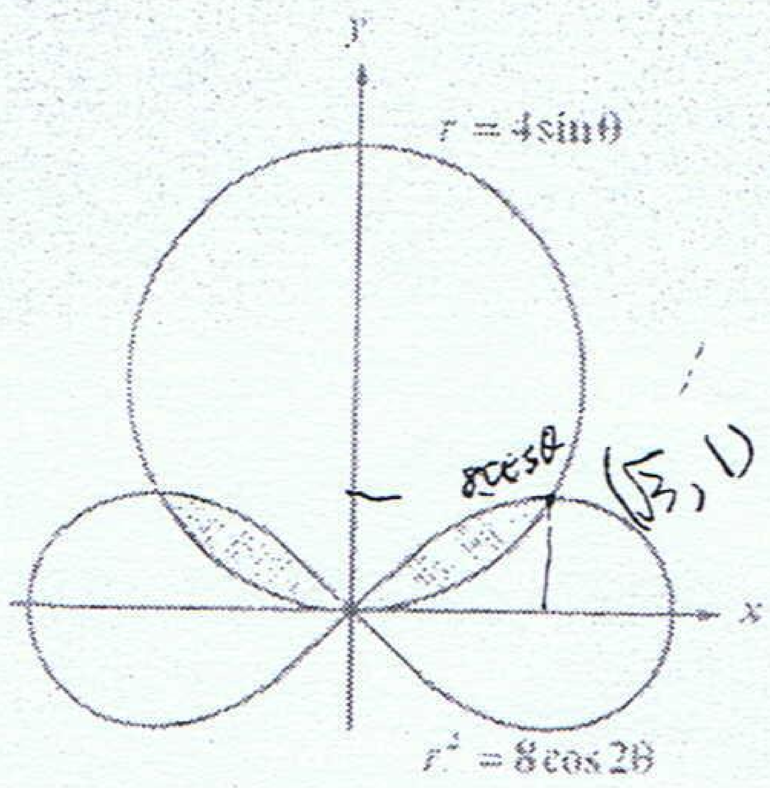
$$y'=\frac{\frac{1}{n}\cdot(1+x^{2n}+x^{4n})^{\frac{1}{n}-1}\cdot(2nx^{2n-1}+4nx^{4n-1})\cdot x-(1+x^{2n}+x^{4n})^{\frac{1}{n}}}{x^2}$$

2. $\dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x^3}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$ 设 a 为实常数，若函数 $\dfrac{x^2+4x+a}{x^3(x-1)^2}$ 在区间 $(0,1)$ 上的原函数为有理函数，则 $a=\underline{-3}$。

$$\int_0 \frac{x^2+4x+a}{x^3(x-1)^2}dx$$

3. 累次积分 $\displaystyle\int_0^8 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^2\frac{1}{1+y^4}dy=\frac{\ln 17}{4}$

$$\frac{\ln 17}{4}$$



4. 若图中的阴影部分是由圆 $r=4\sin\theta$ 与双纽线 $r^2=8\cos2\theta$ 所围成，则阴影部分的面积的积分表达式为 ___；面积等于 $2\left(\frac{2\pi}{3}-2\sqrt{3}\right)$

$$2\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_0^{4\sin\theta}rdr+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{8\cos2\theta}}rdr\right)$$

$$\frac{4}{3}\pi+4-4\sqrt{3}$$

$16\sin^2\theta=8\cos2\theta$

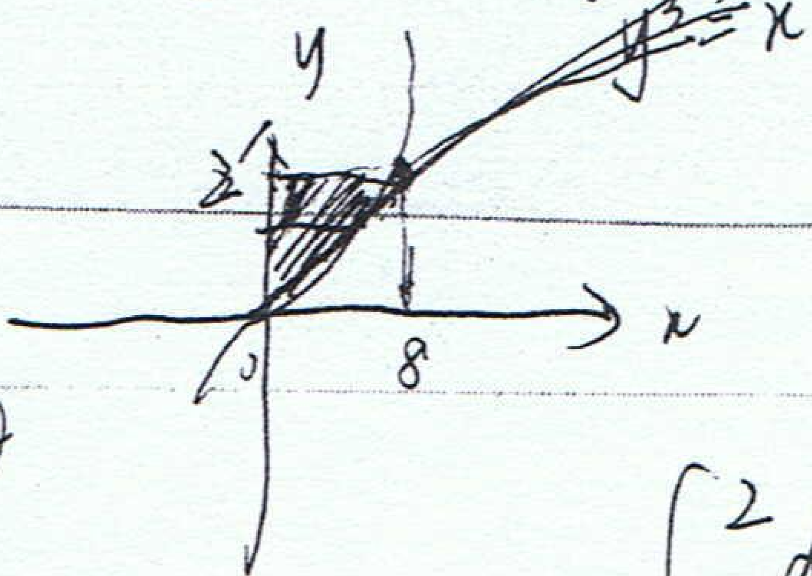
$16\frac{1-\cos2\theta}{2}$

$8-8\cos2\theta=8\cos2\theta$

$16\cos2\theta=8$

$\cos2\theta=\frac{1}{2}$

$2\theta=\frac{\pi}{6}$



圆：$\begin{cases}x=4\sin\theta\cos\theta\\ y=4\sin\theta\sin\theta\end{cases}$

对双纽线：$x=2\sqrt{2\cos2\theta}\cos\theta$

$y=2\sqrt{2\cos2\theta}\sin\theta$

$$\int_0^2dy\int_0^{y^3}\frac{1}{1+y^4}dx$$

$$\int_0^2\frac{y^3}{1+y^4}dy$$

$$\frac{1}{4}\int_0^2\frac{dy^4}{1+y^4}$$

$$\frac{1}{4}\ln|1+y^4|$$

$-1\times 2-4-(a-1)=0$

$2+4+a-1=0$

平面π: $a=-5$

5. 设 a,b 为常数，若平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，直线 L：

$$\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$$

在平面 π 上，则平面 π 的方程是 $2x-4y-z-5=0$

$a=$ -5，$b=$ -2

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = i(-1)-j\cdot(-1)+k\cdot(a-1) = (-i,1,a-1)$$

6. 若 $u(x,y)$ 满足 $du=\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\dfrac{e^y}{1+x^2}dy$，则 $u(x,y)=$ $\dfrac{e^y-1}{1+x^2}$

$(e^y-1)d\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)+\dfrac{1}{1+x^2}d(e^y-1)=d\left(\dfrac{e^y-1}{x^2+1}\right)$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$

7. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\arctan x+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 在 $x=0$ 点的幂级数展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$

其收敛域是 $(-1,1)$

8. $\dfrac{dy}{dx}+y\tan x=\sec x$ 满足初始条件 $y(0)=-1$ 的特解是 $y=\sin x-\cos x$

$\sec x\, y'+y\tan x\sec x=\sec^2 x$

$(y\sec x)'=\sec^2 x$

$y\sec x=\tan x+C$

$y=\sin x+C\cos x$

$x+y+b+\lambda(x+ay-z-3)=0$

$(1+\lambda)x+(1+a\lambda)y-\lambda z+b-3\lambda=0$

二、单选题（每小题6分，共24分）

1. 曲线 $y=x+\sqrt{x^2+1}$ 的渐近线的条数为 B

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

$\dfrac{y}{x}=1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=2$

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{y}{x}=1-\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}=0$

$\lim_{x\to-\infty}y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$

$\dfrac{1+\lambda}{2}=\dfrac{1+a\lambda}{-4}=\dfrac{\lambda}{1}$

$1+\lambda=2\lambda$　$\lambda=1$

$\dfrac{1+a}{-4}=1$　$a=-5$

2. 方程 $6e^{|x|}+x^2-7|x|-6=0$ 的实根个数是 D

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

3. $f(x)=\int_0^1|x-t|\,dt$ 在 $[0,1]$ 上的最小值与最大值分别是 A

(A) $\dfrac{1}{4}$ 与 $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$ 与 1　　(C) 0 与 $\dfrac{1}{2}$　　(D) 0 与 1

$2x-4y-z+b-3=0$

$2+8-5+b-3=0$

$2x-4y-z-5=0$

$=\int_0^x(x-t)dt+\int_x^1(t-x)dt$

$=x^2-x+\dfrac{1}{2}$

$f(x)=6e^{|x|}+x^2-7|x|-6$

$x>0$　$f(x)=6e^x+x^2-7x-6$

$f'(x)=6e^x+2x-7$　$x=0$　$6-7=-1$　单减

必有一点 $f'(x)=0$

$=\int_0^t(t-x)dt+\int_t^1(x-t)dt$

$f(0)=6-6=0$

$x<0$　$f(x)=6e^{-x}+x^2+7x-6$

$f'(x)=-6e^{-x}+2x+7$

$x=0$ 时　$-6+7>0$

$x=-3.5$ 时　$f'(x)=-6e^{3.5}<0$

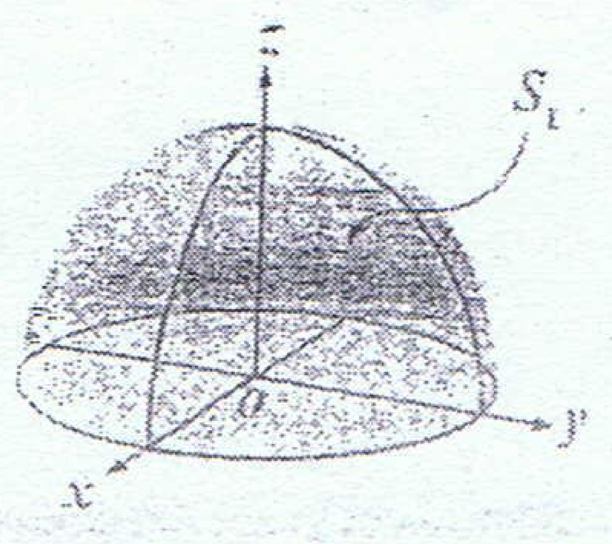


图 2

4. 设 S 是上半球面：$x^2+y^2+z^2=1$，$z>0$ 的上侧，S_1 为 S 的第一卦限部分（如图 2 所示），则有　C

对称性？

C.

(A) $\iint\limits_{S} x\,ds = 4\iint\limits_{S_1} x\,ds$　　(B) $\iint\limits_{S} y\,ds = 4\iint\limits_{S_1} y\,ds$

(C) $\iint\limits_{S} z\,ds = 4\iint\limits_{S_1} z\,ds$　　(D) $\iint\limits_{S} xyz\,ds = 4\iint\limits_{S_1} xyz\,ds$

三、解答题（共 4 小题，62 分．第 1-3 小题每小题 16 分，第 4 小题 14 分）

$y' = \frac{y^2}{y^2+2} = \frac{y}{2y-x}$

$A = (2x_0-2y_0, 0)$

$B: (2y_0, 2y_0)$

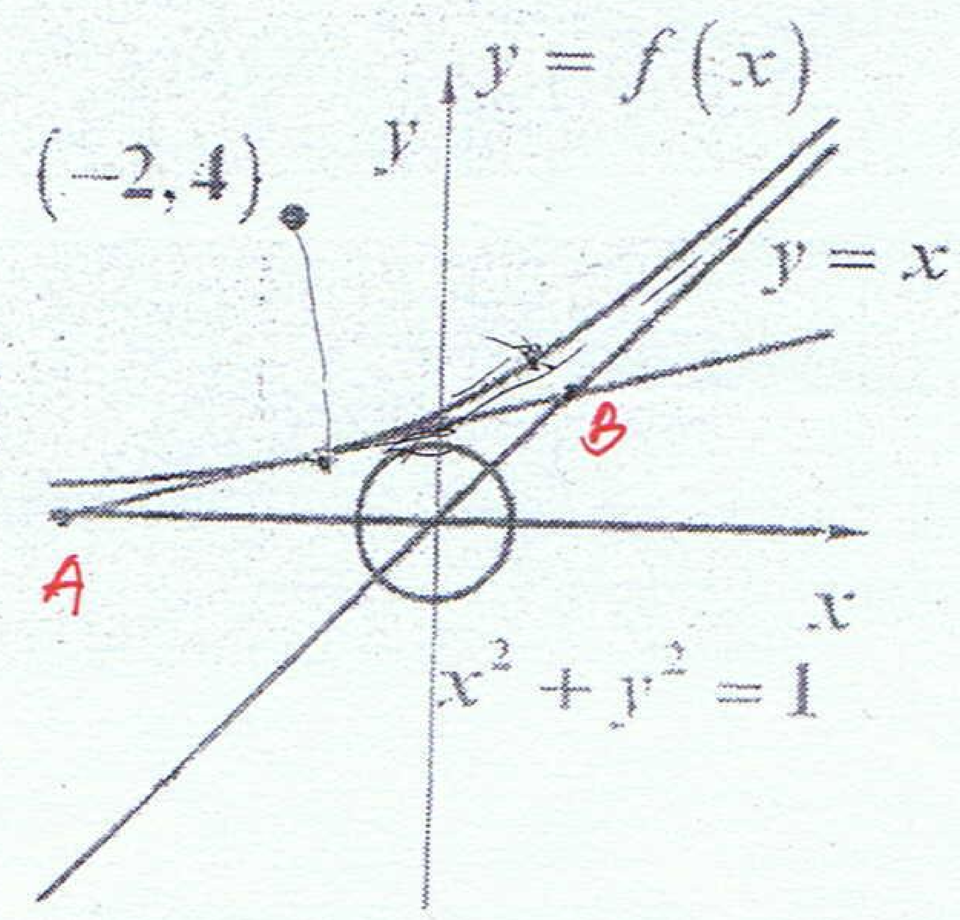


图 3

1. 设曲线 $y=f(x)$ 满足方程

$y^2-xy=2 \quad (y>0)$.

(1) 求证：曲线 $y=f(x)$ 上任意一点的切线介于 x 轴与直线 $y=x$ 之间的线段均被切点所平分；

(2) 在曲线 $y=f(x)$ 上求一点，使该点到定点 $(-2,4)$ 的距离最短，最短距离是多少？$(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}, \sqrt[4]{2})$

$\sqrt{10}$

(3) 求曲线 $y=f(x)$ 上的点与单位圆 $x^2+y^2=1$ 上的点的最短距离 $\sqrt{4\sqrt{2}-4}$ $\cancel{4\sqrt{2}-5}$ $2\sqrt{2}-1$

$y=1$　$x=1$　论证呢？

$$\begin{cases} \frac{y-4}{x+2}\cdot\frac{y}{2y-x}=-1 \\ y^2-xy=2 \end{cases}$$

$y=1$ 时最短　$x=-1$

求与圆心的最短距离

$d=\sqrt{x^2+y^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{y^2-2}{y}\right)^2+y^2}$

$=\sqrt{2y^2+\frac{4}{y^2}-2}$

$\geqslant\sqrt{2\sqrt{8}-2}$

$\geqslant\sqrt{4\sqrt{2}-2}$

$y=\sqrt[4]{2}$ 时

$d=\sqrt{x^2+y^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{y^2-2}{y}\right)^2+y^2}$

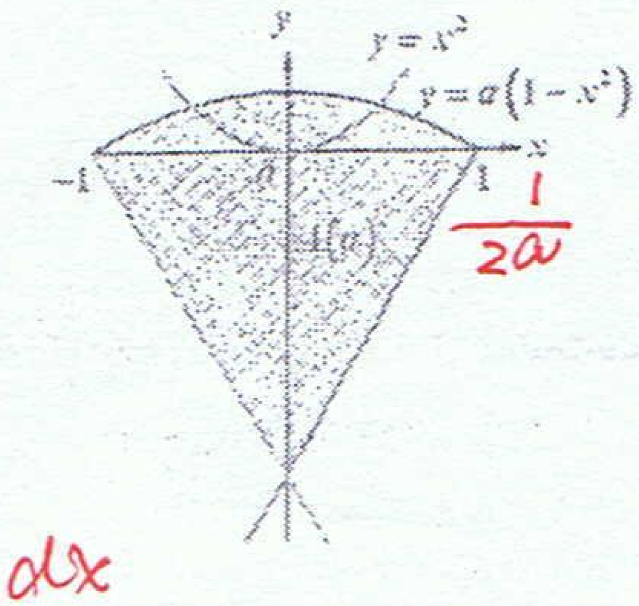
$=\sqrt{\frac{y^4-4y^2+4+y^4}{y^2}}$

$=\sqrt{\frac{2y^4-4y^2+4}{y^2}}$

$A(a)=\frac{1}{2a}+2\int_0^1 a(1-x^2)\,dx$

$=\frac{1}{2a}+\frac{4}{3}a \geq \frac{2\sqrt6}{3}$

$a=\frac{\sqrt6}{4}$ 时取得.



$\frac{1}{2a}$

2. 设 $a>0$，由抛物线 $y=a\left(1-x^2\right)$ 及其在 $x=-1, x=1$ 处的法线所围成的区域面积记为 $A(a)$.

(1) 试问当 a 为何值时 $A(a)$ 最小，最小值是多少？

(2) 若曲线 $y=x^2$ 在 $y=a\left(1-x^2\right)$ 下方那部分弧的长度记为 $L(a)$，求 $\lim\limits_{a\to\infty} L(a)$.

图 4

$\int\sqrt{1+x^2}\,dx$

$=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$=x\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}\,dx+\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$=\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$

$L(a)=2\int_0^{\sqrt{\frac{a}{a+1}}}\sqrt{1+4x^2}\,dx$

$=\int_0^{2\sqrt{\frac{a}{a+1}}}\sqrt{1+x^2}\,dx$

$=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^{2\sqrt{\frac{a}{a+1}}}$

$\lim\limits_{a\to+\infty}L(a)=\frac{1}{2}\times\left[2\cdot\sqrt5+\ln(2+\sqrt5)\right]$

$=\sqrt5+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt5)$

3. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $u=\ln r$.

(1) 求 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$； $\frac{1}{x^2+y^2}$　0

(2) 设一元函数 $f(t)$ 有连续的二阶导数，$f(0)=f'(0)=0$，且复合函数 $z=f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足 $f(t)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{z}{x^2+y^2}=1.$$

$f''\frac{1}{x^2+y^2}+f'\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{f}{x^2+y^2}=1.$

$f''+2f'(t)+f(t)=e^{2t}$

$z''+z=e^{2t}-2$

$e^{-t}\left(-\frac{1}{9}-\frac{t}{3}\right)+\frac{1}{9}e^{2t}$

求：① $f(t)$； ② $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}$； ③ $\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4}\frac{f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

$\frac{1}{9}$

$2\pi(2\ln^2 2-1)\pi$

~~$f(t)=C_1\cos t+C_2\sin t+\frac{1}{5}e^{2t}-2$~~

~~$f(0)=C_1+\frac{1}{5}-2=0$ $C_1=\frac{9}{5}$~~

~~$f'(0)=C_2+\frac{2}{5}=0$ $C_2=-\frac{2}{5}$~~

~~$f(t)=\frac{9}{5}\cos t-\frac{2}{5}\sin t+\frac{1}{5}e^{2t}-2$~~

$\lambda^2+2\lambda+1=e^{2t}$

$\lambda=-1$　$f(t)=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\frac{1}{9}e^{2x}$

$f(0)=0$

$f'(0)=0$

$f(t)=$

② $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{e^{2t}}=\frac{1}{5}$

③ $\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^4\frac{f(\ln r)}{r^2}\cdot r\,dr$

$=\int_0^{2\pi}\int_1^4 f(\ln r)\,d(\ln r)$

$=2\pi\int_0^{\ln 4}f(t)\,dt$

$=2\pi\left[\frac{9}{5}\cos(\ln4)-\frac{2}{5}\sin(\ln4)+\frac{32}{5}-2\right]$

$=2\pi\left[\frac{9}{5}\cos(\ln4)-\frac{2}{5}\sin(\ln4)+\frac{22}{5}\right]$

4. 设 $y(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$　$(|x|<1)$.

(1) 求 $y(0)$，$y'(0)$ 及 $\left(1-x^2\right)y''(x)-xy'(x)$； $=4$

(2) 求 $y(x)$ 的和函数表达式及级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}$ 之和. $\frac{\pi^2}{18}$

$y(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$

$=\frac{1}{2!}\cdot(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4+\cdots$

$y(0)=0$

$g(x)=$

$y(0)=0$　$y'(0)=0$

$(1-x^2)y''(x)-xy'(x)=4$

$\sqrt{1-x^2}\,y''(x)-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y'(x)=\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left[\sqrt{1-x^2}\,y'(x)\right]'=\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sqrt{1-x^2}\,y'(x)=4\arcsin x+C$

$=4\arcsin x$

$y'(x)=4\arcsin x\,d(\arcsin x)$

$y(x)=2\arcsin^2 x+C$

$y(x)=2\arcsin^2 x$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}=y\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\left(\frac{\pi}{6}\right)^2=\frac{\pi^2}{18}$