

西北師範大學  
碩士研究生入學考試  
綜合考試（近世代數、泛函分析、常微  
分方程）科目大綱

（科目代碼：948）

學院名稱(蓋章)： 數信學院

學院負責人(簽字)： 張貴倉

編 制 時 間： 2010年10月30日

## 综合考试（近世代数、泛函分析、常微分方程）科目大纲

（科目代码：948）

# 近世代数

### 第一章 基本概念

#### 考试要点：

要让学生掌握一些基本概念：代数运算、结合律、交换律、分配律、同态与同构、等价关系与集合分类的定义；理解结合律、交换律、分配律的作用以及同态满射保持结合律、交换律、分配律这些数学事实；熟练应用等价关系与集合分类可以相互决定这一结论。

#### 考试内容：

##### 第一节 代数运算与算律

主要讲授代数运算的定义及例子，结合律及其性质，交换律及其性质，分配律及其性质等。

##### 第二节 同态与同构

主要介绍两个带有代数运算的集合之间的保持代数运算的映射、满射及双射以及它们各自的性质。

##### 第三节 等价关系与集合分类

主要介绍等价关系与集合分类这两个概念以及等价关系与集合分类这二者之间的关系。

#### 考核要求：

要让学生识记代数运算、结合律、交换律、分配律、同态与同构、等价关系与集合分类的定义；领会结合律、交换律、分配律的作用；领会同态满射保持结合律、交换律、分配律，等价关系与集合分类可以相互决定这些数学事实。

### 第二章 群论

#### 考试要点：

要让学生掌握有关群的一些基本概念：群、变换群、置换群、循环群、子群、陪集、不变子群、商群；判断群、子群、不变子群、商群的方法；理解群论的一些重要结论：Cayley 定理、Lagrange 定理、群的同态基本定理。

#### 考试内容：

##### 第一节 群的定义与基本性质

介绍群的定义的等价性。对有限群给出第三种定义。介绍群的消去律、以及群中的元的阶的性质。介绍群的同态。

##### 第二节 变换群

介绍变换的概念；给出变换群的定义；介绍一个集合的最大变换群、最小变换群；介绍 Cayley 定理。

##### 第三节 置换群

介绍  $n$  次对称群  $S_n$  的概念；介绍  $S_n$  中的每个置换都可以表成互相没有共同数字的循环置换的乘积这一重要结论。

##### 第四节 循环群

介绍循环群及其生成元的概念；介绍与循环群的存在问题、数量问题、结构问题有关的结论。

##### 第五节 子群

介绍子群的定义以及判断方法、群的子集生成的子群的特点。

#### 第六节 子群的陪集

定义左同余关系以及右同余关系；确定这两个同余关系的等价类，得出一个群  $G$  的子群  $H$  在  $G$  中的左、右陪集的数目相等这一重要结论。介绍 Lagrange 定理。

#### 第七节 不变子群、商群

介绍不变子群的定义，给出判断一个子群是不变子群的方法。介绍商群。

#### 第八节 同态与不变子群

介绍子群、不变子群与群的同态之间的关系。

#### 考核要求：

学生必须识记并领会有关群的一些基本概念；会利用所学知识判断群、子群、不变子群、商群；学生必须有严格的思维能力以及逻辑推理能力；可以综合应用所学的知识去解决简单群论问题,例如较小阶群的分类问题等。

### 第三章 环与域

#### 考试要点：

要让学生掌握有关环与域的一些基本概念：环、交换环、有单位元环、无零因子环、整环、除环、域、子环、子除环、子整环、子域、环的同态、理想、零理想、单位理想、主理想、环中多个元生成的理想、剩余类环、极大理想；理解环论的一些重要结论：不定元存在定理、环的同态基本定理、剩余类环是域的充要条件等。

#### 考试内容：

##### 第一节 定义与基本性质

介绍加群、环、交换环、有单位元环、无零因子环、整环、除环、域等基本概念；无零因子环中环的消去律才成立；介绍无零因子环的特征的概念；介绍无零因子环的特征是有限数时，特征是素数这一结论。

##### 第二节 子环、环的同态

介绍子环、子除环、子整环、子域、环的同态等概念；探讨与环的同态有关的环的性质；介绍挖补定理。

##### 第三节 多项式环

介绍含单位元的交换环  $R$  上的多项式、 $R$  上的多项式环以及  $R$  上的未定元等概念；给出  $R$  上的未定元是存在的这一重要结论。

##### 第四节 理想

介绍环的理想、零理想、单位理想、主理想、环中多个元生成的理想等概念；介绍环的主理想中的元素的特点；给出除环只有零理想和单位理想这一重要结论。

##### 第五节 剩余类环、同态与理想

类比于群论中的商群，在环论中有商环（也叫剩余类环）。给出商环的概念之后，介绍环的同态基本定理；介绍子环、理想与环的同态之间的关系。

##### 第六节 极大理想

给出极大理想的定义；介绍判断一个理想是极大理想的方法，探讨如何利用极大理想去构造域。

##### 第七节 商域

类比于整数环与有理数域之间的关系，介绍一个环的商域的概念，并给出一个无零因子的交换环的商域的存在性与唯一性定理。

#### 考核要求：

学生必须识记并领会有关环的若干基本概念；会利用所学知识判断环、子环、子除环、理想、极大理想、商环等；可以综合应用所学的知识去解决简单环论问题。

## 第四章 整环里的因子分解

### 考试要点:

要让学生掌握一些基本概念:不可约元、唯一分解、主理想环、欧氏环;理解关于整环里的因子分解的一些重要结论:一个整环是唯一分解环的充要条件;主理想环是唯一分解环、欧氏环是唯一分解环等。

### 考试内容:

#### 第一节 不可约元、唯一分解

给出整环中元素整除的定义;介绍平凡因子、不可约元、唯一分解、唯一分解环等概念;举例说明,存在不是唯一分解环的整环。

#### 第二节 唯一分解环

介绍一个整环是唯一分解环的充要条件;介绍唯一分解环中与最大公因子的存在问题、数量问题有关的结论。

#### 第三节 主理想环

介绍主理想环,并给出主理想环是唯一分解环这一重要结论。

#### 第四节 欧氏环

介绍欧氏环,并给出欧氏环是唯一分解环这一重要结论。

### 考核要求:

学生必须识记并领会有关整环里的因子分解的若干基本概念;会利用所学知识判断较简单的整环是否为唯一分解环;可以综合应用所学的知识去解决一些简单的关于整环的因子分解的问题。

## 三、参考书目

- 1、张禾瑞,《近世代数基础》,高等教育出版社,1978年5月修订第1版。
- 2、吴品三,《近世代数》,高等教育出版社,1979年12月第1版。
- 3、刘绍学,《近世代数基础》,高等教育出版社,1999年10月第1版。
- 4、杨永保,《近世代数》,西北师范大学油印本,2000

# 常微分方程

## 第一章 初等积分法

### 考试要点

准确理解微分方程的一些最基本的概念;按如下两条主线掌握一阶方程的初等积分法:变量分离方程和通过变换可化为变量分离方程的方程,全微分方程和通过积分因子法或分项组合法可化为全微分方程的方程;掌握隐式微分方程的微分消参法和可降阶的高阶微分方程的解法。

### 考试内容

#### 第一节 微分方程与解

基本概念:微分方程、阶、解与积分(通解与通积分,特解与积分)、定解问题,通过单摆方程和人口模型等介绍微分方程的背景和建立微分方程求解应用问题的基本方法。

#### 第二节 变量可分离方程

#### 第三节 变量分离法。

#### 第四节 齐次方程

齐次方程和一些齐次方程的变形的解法。

#### 第五节 一阶线性方程

一阶线性方程的解法—常数变易法与 Bernoulli 方程的解法；通过解的一般表达式讨论解的性质。

#### 第六节 全微分方程及积分因子

全微分方程的解法和积分因子法、分项组合法。

#### 第七节 线素场 欧拉折线

一阶微分方程的几何解释和欧拉折线法。

#### 第八节 一阶隐式微分方程

一阶隐式微分方程的微分消参法，特别是 Clairaut 方程的解法、奇解与包络。

#### 第九节 一阶微分方程应用举例

简介

#### 第十节 几种可降阶的高阶方程

几种可降阶的高阶微分方程的解法。

### 考核要求

掌握微分方程的基本概念--微分方程、阶、解与积分（通解与通积分，特解与积分）等；掌握变量分离方程和通过变换可化为变量分离方程的方程、全微分方程和通过积分因子法或分项组合法可化为全微分方程的一阶微分方程的解法；掌握隐式微分方程的微分消参法和可降阶的高阶微分方程的解法；能够通过解的一般表达式讨论解的性质，理解和应用奇解概念；通过建立微分方程求解一些应用问题。

## 第二章 基本定理

### 教学要点

解的存在唯一性定理、延拓定理、解对初值的连续依赖性和可微性定理以及所涉及概念的准确理解，解的存在唯一性定理的详细证明。

### 教学内容

#### 第一节 解的存在性与唯一性定理

引进并详细证明解的存在唯一性定理；依据具体例子对定理的条件做详细说明。

#### 第二节 解的延展

介绍并证明解的延展定理，示例说明该定理的条件；介绍第一比较定理。

#### 第三节 解对初值的连续依赖性

介绍并证明解对初值的连续依赖性定理。

#### 第四节 解对初值的可微性

介绍并证明解对初值的可微性定理。

### 考核要求

重点掌握解的存在唯一性定理、延拓定理的内容以及解的存在唯一性定理的证明思想；熟练掌握 Picard 逼近列、Lipschitz 条件和延拓概念。

## 第三章 线性微分方程

### 考试要点

准确理解线性微分方程的一般理论；熟练掌握 Liouville 公式、常数变易法和常系数线性微分方程的特征根法、比较系数法、Laplace 变换；理解振动现象。

### 考试内容

#### 第一节 线性方程的一般性质

线性微分方程的解的存在唯一性定理及线性微分算子的性质。

## 第二节 $n$ 阶线性齐次微分方程

建立齐次线性微分方程的一般理论, 得到通解结构定理, 证明 Liouville 公式并应用到 2 阶微分方程。

## 第三节 $n$ 阶线性非齐次方程

$n$  阶线性非齐次方程的通解结构定理与常数变易法。

## 第四节 $n$ 阶常系数线性齐次微分方程解法

用特征根法解常系数线性齐次微分方程的基本步骤、理论证明、典型示例。

## 第五节 $n$ 阶常系数线性非齐次微分方程解法

比较系数法的建立、理论证明、典型示例。

## 第六节 Laplace 变换

介绍 Laplace 变换以及如何应用 Laplace 变换求解一些常系数线性非齐次微分方程的 Cauchy 问题。

## 第七节 2 阶常系数线性方程与振动现象

依据线性微分方程的解的表示解释振动现象。

### 考核要求

准确理解线性微分方程的一般理论; 熟练掌握 Liouville 公式、常数变易法、特征根法、比较系数法和 Laplace 变换; 能够依据解的一般表示讨论解的一些属性。

## 第四章 线性微分方程组

### 考试要点

准确理解线性微分方程组的一般理论; 能够熟练掌握 Liouville 公式、常数变易法、常系数线性微分方程的特征根法和简单的非齐次方程的解法。

### 考试内容

#### 第一节 一阶微分方程组

一阶微分方程组初值问题解的存在唯一性定理。

#### 第二节 线性微分方程组的一般概念

一阶线性微分方程组初值问题解的存在唯一性定理。

注: 第一节与第二节共 2 学时

#### 第三节 线性齐次微分方程组的一般理论

建立线性齐次微分方程组的一般理论, 得到通解结构定理, 证明 Liouville 公式。

#### 第四节 线性非齐次微分方程组的一般理论

线性非齐次微分方程组的一般理论和常数变易法。

#### 第五节 常系数线性微分方程组的解法

特征根法—理论证明与方法的熟练应用; 简单的非齐次方程的解法。

### 考核要求

准确理解线性微分方程组的一般理论; 熟练掌握 Liouville 公式、常数变易法和特征根法; 能够依据解的一般表示讨论解的一些属性。

## 第五章 定性与稳定性概念

### 考试要点

二维自治系统初等奇点的分类及其附近的轨线分布; 极限环的定义与示例; 稳定性概念及其判定定理, 分别应用稳定性概念、线性化系统的特征值、Liapunov 第二方法讨论自治系统的解的稳定性。

### 考试内容

第一节 相平面作图 单摆

自治系统及其轨线的分类与性质。

第二节 初等奇点附近的轨线分布

二维自治系统初等奇点的分类—结点、鞍点、焦点、中心及其附近的轨线分布。

第三节 极限环举例

极限环的定义与示例。

第四节 稳定性概念

稳定性概念、判定定理和判定方法，着重 Liapunov 第二方法。

**考核要求**

重点掌握二维自治系统初等奇点的分类及其附近的轨线分布；理解稳定性概念及其判定定理，会应用稳定性概念、线性化系统的特征值、Liapunov 第二方法讨论自治系统的解的稳定性。

**二、参考书目**

- 1、东北师范大学数学系，《常微分方程》，高等教育出版社，1982年。
- 2、叶严谨，《常微分方程》，高等教育出版社，1982年（第二版）。
- 3、中山大学数学系，《常微分方程》，高等教育出版社，1983年（第二版）。
- 4、国家教育委员会师范教育司，《普通高度师范学校数学教育专业（本科）教育教学基本要求（试行）》，首都师范大学出版社，1994。

# 泛函分析

## 第一章 度量空间与线性赋范空间

**考试要点：**

度量空间的概念，例子；度量空间中的收敛性与连续性；稠密性；可分性；Cauchy 列与度量空间的完备性；压缩映像原理及其应用；线性赋范空间的概念，例子；Banach 空间的概念。

**考试内容：**

第一节 度量空间的概念与例子

距离及度量空间的定义；例子（欧氏空间  $R^n$ ；连续函数空间  $C[a, b]$ ；数列空间  $l^p$  等）。

第二节 度量空间中的极限·稠密性·可分空间

领域的概念；收敛点列；有界集；具体空间中收敛性的意义；稠密性与可分空间的概念；不可分空间的例子。

第三节 连续映射

映射连续性的各种定义及其等价性。

第四节 Cauchy 点列与完备度量空间

度量空间中 Cauchy 点列的概念；完备度量空间的定义；完备度量空间与不完备度量空间的各类例子；度量空间闭子空间的完备性。

第五节 度量空间的完备化

等距同构；度量空间的完备化定理；

第六节 压缩映像原理及其应用

压缩映像的定义；压缩映像原理；在隐函数定理及常微分方程中的应用。

### 第七节 线性空间

本节内容为线性空间的基本概念。因学生已在高等代数课程中学过有限维空间的有关内容，故只需简要回顾并强调无限维线性空间的特征即可。

### 第八节 线性赋范空间和 Banach 空间

范数，线性赋范空间和 Banach 空间的概念；依范数收敛； $R^n$  空间； $C[a,b]$  空间； $l^\infty$  空间； $L^\infty$  空间； $L^p[a,b]$  空间； $l^p$  空间；有限维赋范空间的拓扑同构性。

#### 考核要求：

掌握度量空间，线性赋范空间和 Banach 空间的概念和性质；掌握映射连续性，度量空间的完备性等概念；熟悉  $R^n$  空间， $C[a,b]$  空间， $l^\infty$  空间， $L^\infty$  空间， $l^p$  空间， $L^p[a,b]$  空间；透彻理解压缩映像原理及其简单应用。能独立解答基本的习题。

## 第二章 线性有界算子和线性连续泛函

#### 考试要点：

线性有界算子，线性连续泛函，线性算子空间，共轭空间。

#### 考试内容：

##### 第一节 线性有界算子与线性连续泛函

线性有界算子与线性连续泛函的概念，例子，有界与连续的等价性，线性有界算子零空间的性质，算子范数。

##### 第二节 线性算子空间和共轭空间

线性算子空间的结构及其完备性，共轭空间，保距算子，同构映照，同构，一些具体空间的共轭空间。

#### 考核要求：

掌握线性有界算子，线性连续泛函，有界性，连续性，算子范数，共轭空间，保距算子，同构映照，同构等基本概念；掌握有界与连续的等价性定理，基本定理；能够计算简单的算子范数和一些具体空间的共轭空间。能独立解答基本的习题。

## 第三章 内积空间和 Hilbert 空间

#### 考试要点：

内积空间，投影定理，Hilbert 空间，就范直交系，Hilbert 空间上线性连续泛函的表示。

#### 考试内容：

##### 第一节 内积空间的基本概念

内积空间与 Hilbert 空间的定义，平行四边形公式，内积空间的判定。

##### 第二节 投影定理

点到集合的距离，凸集，极小化向量定理，集合的正交，Hilbert 空间的正交分解，投影算子及其性质。

##### 第三节 Hilbert 空间中的就范直交系

就范直交系，Fourier 系数集，Bessel 不等式，Parseval 恒等式，完全就范直交系的定义与判定，Fourier 展式，Gram-Schmidt 正交化过程，Hilbert 空间的同构。

##### 第四节 Hilbert 空间上的线性连续泛函

Riesz 表示定理，共轭算子及其性质。

#### 第五节 自伴算子、酉算子和正常算子

自伴算子、酉算子和正常算子的基本概念与简单性质。

#### 考核要求:

掌握内积空间, Hilbert 空间, 平行四边形公式, 就范直交系, Bessel 不等式, Parseval 恒等式, Fourier 展式, 投影算子, 共轭算子, 自伴算子, 酉算子和正常算子等基本概念; 掌握极小化向量定理, 投影定理, 完全就范直交系的判定定理, Riesz 表示定理等基本定理的内容与证明; 能独立解答基本的习题。

### 第四章 Banach 空间中的基本定理

#### 考试要点:

Hahn-Banach 延拓定理, Riesz 表示定理, 线性赋范空间中的共轭算子,

#### 第一节 泛函延拓定理

次线性泛函, Hahn-Banach 泛函延拓定理的实形式、复形式及其推论。

#### 第二节 $C[a, b]$ 的共轭空间、Riesz 表示定理

#### 第三节 共轭算子

#### 第四节 线性赋范空间中共轭算子的定义及性质。

#### 第五节 纲定理和一致有界性定理

第一纲集, 第二纲集, Baire 纲定理, 一致有界性定理强收敛、弱收敛和一致收敛强收敛、弱收敛、弱\*收敛和一致收敛的定义, 例子, 相互关系, 强收敛的充要条件。

#### 第六节 逆算子定理

逆算子定理及其证明。

#### 第七节 闭图象定理

线性算子的图象, 闭算子, 闭图象定理。

#### 考核要求:

掌握本章涉及到的所有基本概念, 基本定理; 由于 Hahn-Banach 延拓定理, Riesz 表示定理, Baire 纲定理, 逆算子定理, 闭图象定理是泛函分析基础理论的主要构成部分, 要求熟练掌握这些内容; 能独立解答基本的习题。

### 第五章 线性算子的谱

#### 考试要点:

简要介绍线性算子的谱的概念, 基本性质。

谱的概念

正则算子, 正则点, 正则集, 谱点, 特征值, 特征向量, 点谱, 连续谱, 例子。

#### 第一节 线性有界算子谱的基本性质

谱集的闭性。

#### 考核要求:

了解线性算子的谱的概念, 基本性质。

### 三、参考书目

- 1、程其襄等,《实变函数与泛函分析基础》, 高等教育出版社, 1983, 第一版。
- 2、王声望, 郑维行,《实变函数与泛函分析概要》, 第二册, 高等教育出版社, 1992, 第二版。
- 3、夏道行等,《实变函数论与泛函分析》, 下册, 高等教育出版社, 1985, 第二版。

