海南师范大学硕士研究生入学考试初试科目
考　试　大　纲

科目名称： 实变函数

适用专业： 基础数学/应用数学

一、考试形式与试卷结构

（一）试卷满分 及 考试时间

本试卷满分为 100 分，考试时间为 120 分钟。

（二）答题方式

答题方式为闭卷、笔试。

试卷由试题和答题纸组成；答案必须写在答题纸（由考点提供）相应的位置上。

二、考查目标（复习要求）

全日制攻读硕士学位研究生入学考试实变函数科目考试内容包括实变函数一门学科基础课程，要求考生系统掌握相关学科的基本知识、基础理论和基本方法，并能运用相关理论和方法分析、解决相关的实际问题。

三、考试内容概要

第一章　集合

1. 考试内容

§1 集合概念：集合的描述与表示，子集，集合的相等。

§2 集合的运算：集合的并、交、差、补运算及其性质，笛·摩根公式：上限集、下限集及其性质。

§3 对等与基数：映射、单射、满射、双射，逆映射及其性质；对等及其性质；基数与基数的比较，伯恩斯坦定理。

§4 可数集合：可数集的定义及等价条件，可列集及其性质，可列集的判断证明。

§5 不可数集合：不可数集的存在性，连续基数及其性质，连续基数的判断证明，基数无最大者。

2. 考试要求

⑴ 理解集合的并、交、差、补、上限集于下限集等概念，熟练掌握集合的各种运算，掌握证明集合间包含与相等关系的一般方法。

⑵ 了解基数的概念，掌握证明两个集合对等的方法，会用伯恩斯坦定理，理解有限集与无限集的特征。

⑶ 理解可数集与具有连续基数的集的概念及其性质，掌握可数集，连续基数的判断证明方法。

3. 重点、难点

重点 集合的运算及其运性质，集合的对等，基数的比较，可数集与具有连续基数的集合的性质。

难点 上限集、下限集、可数集，连续基数的判断证明。

第二章　点集

1. 考试内容

§1 度量空间，n 维欧氏空间：度量空间概念、邻域及其性质、收敛点列、点集的距离与直径、区间概念。

§2 聚点，内点，界点：内电，外点，边界点，聚点及孤立点，聚点及其等价条件，边界，内核、导集与闭包概念及其简单性质。Bolzano-Weierstrass 定理，

§3 开集、闭集、完备集：开集与闭集的及其运算性质，海涅-波雷尔有限覆盖定理，紧集、自密集与完备集。

§4. 直线上的开集、闭集和完备集的构造：直线上开集、闭集、完备集的构造。平面上开集的构造，康托（Cantor）集的构造与性质。

2. 考试要求

⑴ 理解邻域、内点、聚点、开集、闭集等基本概念及聚点的等价条件，

⑵ 熟练掌握开集、闭集的性质，掌握开集、闭集的判断证明方法。了解直线上开集的构造，知道直线上闭集和完备集的构造。

⑶ 了解 Bolzano-Weierstarss 定理，Borel 有限覆盖定理。

⑷ 了解 Cantor 集的构造及其性质。

3. 重点、难点

重点 聚点及其等价条件，Bolzano-Weierstrass 定理，直线上开集的构造，Borel 有限覆盖定理，Cantor 集。

难点 聚点、内点、开集、闭集、完备集等概念，Cantor 集的构造及其性质。

第三章、测度论

1. 考试内容

§1 外测度：外测度及其性质，

§2 可测集：可测集的定义，卡拉皆屋独利条件，可测集的运算性质，单调可测集列极限的测度。

§3 可测集类：区间、开集、闭集皆可测、G_6 型集，F_σ型集，可测集同开集、闭集、 G_6 型集、F_σ型集之间的关系。

2. 考试要求

⑴ 了解勒贝格外测度的定义及主要性质。

⑵ 理解勒贝格可测集的定义并掌握其运算。

⑶ 理解勒贝格测度的可列可加性以及单调可测集列极限的测度。

⑷ 了解常见的可测集合,知道勒贝格可测集与开集、闭集、 G_6 型集与 F_σ型集之间的关系。

3. 重点、难点

重点 勒贝格可测集的运算性质，单调可测集列极限的测度，可测集同开集、闭集、G_6 型集以及 F_σ型集之间的关系。

难点 可测集概念的引入与可测集的构造。

第四章、可测函数

1. 考试内容

§1 可测函数及其性质：点集上的函数：广义实数系 R=R∪(±∞)的运算。可测函数的定义及等价条件，连续函数与简单函数皆可测，可测函数关于代数运算和极限运算的封闭性，可测函数同简单函数列的关系，“几乎处处”的概念。

§2 叶果洛夫定理：可测函数列的收敛性，叶果洛夫定理。

§3 可测函数的构造：鲁金定理（两种形式）

§4 依测度收敛：依测度收敛，依测度收敛与几乎处处收敛互不包含的例子，勒贝格定理，黎斯定理，依测度收敛极限的唯一性。

2. 考试要求

⑴ 了解点集上的连续函数、函数列的上极限与下极限、“几乎处处”等概念。

⑵ 理解可测函数的定义及其在代数运算与极限运算下的封闭性，可测函数可表为简单函数列的极限。

⑶ 了解鲁金定理，知道可测函数同连续函数之间的关系。

⑷ 理解可测函数列的一致收敛、几乎处处收敛及依测度收敛的概念及它们之间的相互关系。

3. 重点、难点

重点 可测函数定义及等价条件，可测函数关于代数运算和极限运算的封闭性，依测度收敛与几乎处处收敛的关系，鲁金定理。

难点 叶果洛夫定理，黎斯定理，鲁金定理。

第五章、勒贝格积分

1. 考试内容

§5.1 黎曼积分：黎曼积分定义，达布定理，

§5.2 勒贝格积分的定义：测度有限集合上有界函数的勒贝格大和与小和，上积分与下积分，有界勒贝格可积函数，有界可积的充要条件是有界可测，有界勒贝格可积函数的运算性质，勒贝格积分与黎曼积分的关系。

§5.3 勒贝格积分的性质：有界函数积分的积分区域与被积函数的有限可加性，积分的线性性质。积分的单调性与绝对可积性，

§5.4 一般可积函数：非负函数积分存在与可积的定义，一般函数积分存在与可积定义，勒贝格积分的性质。

§5.5 积分的极限定理：勒贝格控制收敛定理，列维渐升函数列积分定理，勒贝格逐项积分定理，可积函数积分区域可列可加性，法都引理，广义黎曼可积与勒贝格可积的关系。

§5.6 勒贝格积分的几何意义. 富比尼定理：直积、截面的概念及性质，勒贝格积分的几何意义.，富比尼定理。

2. 考试要求

⑴ 理解勒贝格积分的定义及其基本性质，特别是绝对可积性和绝对连续性是勒贝格积分的重要特征。

⑵ 理解勒贝格控制收敛定理、勒贝格逐项积分定理、列维定理和法都引理，并掌握它们的应用。

⑶ 知道勒贝格积分与黎曼积分的关系。

⑷ 知道直积、截面的概念及性质，熟识勒贝格积分的几何意义.，了解富比尼定理。

3. 重点、难点

重点 勒贝格积分的性质，积分极限定理。

难点 勒贝格积分的性质及其应用。

第六章　度量空间与赋范线性空间

1. 考试内容

§6.1 度量空间的进一步例子：离散的度量空间，序列空间 S，有界函数空间，可测函数空间与 C[a,b]空间。

§6.2 度量空间中的极限，稠密集，可分空间。

§6.3 连续映射：连续映射的定义及其等价条件，。

§6.4 柯西点列和完备度量空间：柯西点列和完备度量空间概念，完备度量空间的子空间是完备空间的充要条件，l^{∞}，C，C[a,b]，P[a,b]是完备度量空间，不完备度量空间例子。

§6.5 度量空间的完备化：等距同构，度量空间的完备化定理。

§6.6 压缩映射：压缩映射原理，隐函数存在定理，Picard 定理，

§6.7 线性空间：线性空间定义及例子，子空间；M 张成的线性包，向量的线性相关与线性无关，线性无关子集，线性空间维数。

§6.8 赋范线性空间和巴拿赫空间：赋范线性空间和巴拿赫空间定义及例子，HÖlder 不等式，Minkowski 不等式，有限维赋范线性空间的性质。

2. 考试要求

⑴ 理解度量空间概念，掌握度量空间的判断证明方法。

⑵ 理解度量空间中的极限，了解稠密集与可分空间。

⑶ 理解连续映射的定义，熟识连续映射等价条件，

⑷ 理解完备度量空间概念，熟识度量空间的判断证明方法，了解度量空间的完备化。

⑸ 理解压缩映射原理，知道压缩映射原理的作用。

⑹ 理解线性空间概念，熟识线性空间的判断证明方法，了解子空间；M 张成的线性包，向量的线性相关与线性无关，线性无关子集，线性空间维数。

⑺ 理解赋范线性空间和巴拿赫空间概念，了解 HÖlder 不等式，Minkowski 不等式，有限维赋范线性空间的性质。

3. 重点、难点

重点　度量空间，度量空间中的极限，连续映射及其等价条件，完备度量空间，压缩映射原理，线性空间，向量的线性相关与线性无关，赋范线性空间。

难点 完备度量空间，度量空间的完备化，压缩映射原理。

参考教材或主要参考书：

《实变函数》，周民强编，北京大学出版社（第二版）